



**UNIVERSIDAD CATÓLICA  
DE SANTIAGO DE GUAYAQUIL  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
CARRERA: INGENIERÍA CIVIL**

**TÍTULO:**

CUANTIFICACIÓN DE LAS PÉRDIDAS POR INFILTRACIÓN PRODUCIDAS EN EL RÍO "LA CAMARONA" UNA VEZ RECIBIDO UN CAUDAL ADICIONAL DE 4.60 m<sup>3</sup>/s EN SU CAUCE NATURAL, COMO CONTRIBUCIÓN AL NIVEL DE AGUAS DEL EMBALSE SAN VICENTE.

**AUTOR:**

**CASANOVA SANDOVAL, DIEGO LEONARDO**

**TUTOR:**

**ING. BRAVO SANTOS, JAIME**

**Guayaquil, Ecuador**

**2013**



**UNIVERSIDAD CATÓLICA  
DE SANTIAGO DE GUAYAQUIL  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
CARRERA: INGENIERÍA CIVIL**

### **CERTIFICACIÓN**

Certificamos que el presente trabajo fue realizado en su totalidad por **Diego Leonardo Casanova Sandoval**, como requerimiento parcial para la obtención del Título de **Ingeniero Civil**.

#### **TUTOR**

---

**Ing. Jaime Bravo Santos. MSc.**

#### **REVISOR 1**

---

**Ing. Pedro Castro Villalva. MSc.**

#### **REVISOR 2**

---

**Dra. Estela Ampuero Velasco. MSc.**

#### **DIRECTOR DE LA CARRERA**

---

**Ing. Mario Dueñas Rossi**

**Guayaquil, 05 de Agosto del año 2013**



**UNIVERSIDAD CATÓLICA  
DE SANTIAGO DE GUAYAQUIL  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
CARRERA: INGENIERÍA CIVIL**

## **DECLARACIÓN DE RESPONSABILIDAD**

**Yo, Diego Leonardo Casanova Sandoval**

### **DECLARO QUE:**

El Trabajo de Titulación **“CUANTIFICACIÓN DE LAS PÉRDIDAS POR INFILTRACIÓN PRODUCIDAS EN EL RÍO “LA CAMARONA” UNA VEZ RECIBIDO UN CAUDAL ADICIONAL DE 4.60 m<sup>3</sup>/s EN SU CAUCE NATURAL, COMO CONTRIBUCIÓN AL NIVEL DE AGUAS DEL EMBALSE SAN VICENTE”**, previa a la obtención del Título de **Ingeniero Civil**, ha sido desarrollado en base a una investigación exhaustiva, respetando derechos intelectuales de terceros conforme las citas que constan al pie de las páginas correspondientes, cuyas fuentes se incorporan en la bibliografía. Consecuentemente este trabajo es de mi total autoría.

En virtud de esta declaración, me responsabilizo del contenido, veracidad y alcance científico del Trabajo de Titulación referido.

**Guayaquil, 05 de Agosto del año 2013**

---

**Diego Leonardo Casanova Sandoval**



**UNIVERSIDAD CATÓLICA  
DE SANTIAGO DE GUAYAQUIL  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
CARRERA: INGENIERÍA CIVIL**

## **AUTORIZACIÓN**

**Yo, Diego Leonardo Casanova Sandoval**

Autorizo a la Universidad Católica de Santiago de Guayaquil, la **publicación** en la biblioteca de la institución del Trabajo de Titulación: **“CUANTIFICACIÓN DE LAS PÉRDIDAS POR INFILTRACIÓN PRODUCIDAS EN EL RÍO “LA CAMARONA” UNA VEZ RECIBIDO UN CAUDAL ADICIONAL DE 4.60 m<sup>3</sup>/s EN SU CAUCE NATURAL, COMO CONTRIBUCIÓN AL NIVEL DE AGUAS DEL EMBALSE SAN VICENTE”**, cuyo contenido, ideas y criterios son de mi exclusiva responsabilidad y total autoría.

**Guayaquil, 05 de Agosto del año 2013**

---

**Diego Leonardo Casanova Sandoval**

## **AGRADECIMIENTO**

Dios, Patria y familia.

De manera especial y sincera mis agradecimientos al Ing. Jaime Bravo Santos. Su guía, confianza y apoyo han sido un invaluable aporte para la realización del presente trabajo y para mi formación profesional y particularmente personal.

De igual manera, mis profundos sentimientos de gratitud al Ing. Nasser Gordillo Barahona, quien con su paciencia y sabiduría supo exigirme y motivarme en una etapa crucial de mi vida.

Quiero expresar también mi imperecedero agradecimiento a la compañía Hidalgo e Hidalgo S.A. quienes hicieron factible la realización del presente trabajo.

## **DEDICATORIA**

A mi familia y amigos, invaluable seres que han forjado y han dejado una impronta en mi carácter y personalidad.

# TRIBUNAL DE SUSTENTACIÓN

---

Ing. Jaime Bravo Santos. MSc.  
PROFESOR GUÍA Ó TUTOR

---

Ing. Pedro Castro Villalva. MSc.  
PROFESOR DELEGADO



**UNIVERSIDAD CATÓLICA  
DE SANTIAGO DE GUAYAQUIL**

**FACULTAD DE INGENIERÍA  
CARRERA: INGENIERÍA CIVIL**

**CALIFICACIÓN**

---

**Ing. Jaime Bravo Santos. MSc.  
PROFESOR GUÍA Ó TUTOR**

# ÍNDICE GENERAL

<b>1. ANTECEDENTES, OBJETIVO, ALCANCE Y METODOLOGÍA .....</b>	<b>2</b>
1.1.- Antecedentes: .....	2
1.2.- Objetivos:.....	3
1.2.1.- Objetivo General:.....	3
1.2.2.- Objetivos específicos: .....	4
1.3.- Alcance: .....	4
1.4.- Características del sistema “La Camarona – Balsas”:	5
1.4.1.- Generalidades sobre la infiltración:.....	5
1.4.2.- El sistema “La Camarona – Balsas”:	6
1.4.3.- Erosión del sistema “La Camarona – Balsas”:	8
<b>2. MÉTODOS PARA DETERMINAR LA CONDUCTIVIDAD HIDRÁULICA Y LA INFILTRACIÓN EN CANALES .....</b>	<b>11</b>
Introducción:.....	11
2.1.- Métodos para determinar la conductividad hidráulica: .....	11
2.1.1.- Métodos in situ:.....	11
2.1.2.- Movimiento del fluido en el suelo: .....	12
2.1.3.- Velocidad de descarga (Darcy): .....	15
2.1.4.- Estructura y estratificación:.....	17
2.1.5.- Permeabilidad en terrenos estratificados: .....	18
2.1.5.1.- Permeabilidad en el sentido perpendicular a la dirección de los estratos:.....	18
2.1.5.2.- Permeabilidad en el sentido paralelo a la dirección de los estratos: .....	19
2.1.6.- Fórmulas empíricas para determinar “K” coeficiente de permeabilidad: ....	21
2.1.7.- Ensayos en laboratorio: .....	22
2.1.7.1.- Permeámetro de carga constante:.....	22
2.1.7.2.- Permeámetro de Nivel Variable: .....	23
2.2.- Infiltración en Canales:.....	24
2.2.1.- Método de Dupuit: .....	24
2.2.2.- Solución analítica para el problema de infiltración en canales con fondo curvilíneo: .....	30
2.2.3.- Análisis de infiltración en canales prismáticos:.....	31
2.3.4.- Infiltración a través de capas saturadas y no saturadas:.....	32

<b>3. CÁLCULO DEL CAUDAL DE INFILTRACIÓN .....</b>	<b>35</b>
3.1. Introducción .....	35
3.2. Descripción visual del proyecto .....	35
3.3. Procedimiento de las pruebas de campo.....	46
3.4. Granulometrías ensayadas .....	46
3.5. Coeficiente de permeabilidad in situ .....	48
3.6. Permeabilidad en terrenos estratificados.....	49
3.7. Mediciones en Campo.....	52
3.8. Cálculo del caudal de infiltración in situ .....	54
3.8.1. Introducción .....	54
3.8.2. Desarrollo.....	56
<b>4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....</b>	<b>60</b>
4.1. Conclusiones .....	60
4.2. Recomendaciones .....	60
<b>5. BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>63</b>
<b>6. ANEXOS.....</b>	<b>65</b>

## ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 2.1.- VALORES TÍPICOS DE CARGA DE PRESIÓN NEGATIVA $h_w(m)$ (BOUWER, 2002). .....	29
TABLA 3.1.- VALORES DEL DIÁMETRO EFECTIVO, COEFICIENTE DE UNIFORMIDAD Y GRADO DE CURVATURA.....	47
TABLA 3.2.- VALORES DE LA CONDUCTIVIDAD HIDRÁULICA EN CADA ESTRATO (M/S). .....	48
TABLA 3.3.- VALORES DEL COEFICIENTE DE PERMEABILIDAD HORIZONTAL PROMEDIO.....	49
TABLA 3.4.- VALORES DEL COEFICIENTE DE PERMEABILIDAD VERTICAL PROMEDIO.	50
TABLA 3.5.- RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES DE PERMEABILIDAD VERTICAL Y HORIZONTAL. ....	50
TABLA 3.6.- VALORES DEL COEFICIENTE DE PERMEABILIDAD TOTAL PROMEDIO. ...	51
TABLA 3.7.- IDENTIFICACIÓN DE LOS CASOS DEL MÉTODO DE DUPUIT.....	56
TABLA 3.8.- CONDICIONES HIDRÁULICAS DE LOS LUGARES DONDE SE REALIZARON LAS PRUEBAS IN SITU LUEGO DE RECIBIDO EL CAUDAL DE $4.60 \text{ m}^3/\text{SEG}$ .....	56
TABLA 3.9.- CAUDAL INFILTRADO CONSIDERANDO EL CASO 3 DEL MÉTODO DE DUPUIT. ....	56
TABLA 3.10.- CAUDAL INFILTRADO CONSIDERANDO EL CASO 1 DEL MÉTODO DE DUPUIT. ....	57
TABLA 3.11.- CAUDAL INFILTRADO EN LOS LUGARES DONDE SE REALIZARON LAS PRUEBAS DE CAMPO.....	57
TABLA 3.12.- POSIBLES PÉRDIDAS DE INFILTRACIÓN PRODUCIDAS. ....	58

## ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1.1. IMPLANTACIÓN DEL SISTEMA HIDROGRÁFICO LA CAMARONA - BALSAS.....	3
FIGURA 1.2. PERFIL DE HUMEDAD DE UN RÍO.....	6
FIGURA 2.1. LÍNEA DE INFILTRACIÓN PRESENTADA EN UNA MUESTRA DE SUELO..	14
FIGURA 2.2. PERMEABILIDAD VERTICAL.....	18
FIGURA 2.3. PERMEABILIDAD HORIZONTAL.....	19
FIGURA 2.4. PERMEÁMETRO DE CARGA CONSTANTE.....	23
FIGURA 2.5. PERMEÁMETRO DE CARGA VARIABLE.....	23
FIGURA 2.6. MÉTODO DE DUPUIT. CASO 1.....	25
FIGURA 2.7. MÉTODO DE DUPUIT. CASO 2.....	27
FIGURA 2.8. MÉTODO DE DUPUIT. CASO 3.....	28
FIGURA 3.1. CAUCE NATURAL DEL RÍO LA CAMARONA ABSCISA 0+000.00 (ENTREGA DE TUBERÍA DE CONDUCCIÓN).....	36
FIGURA 3.2. CAUCE NATURAL DEL RÍO LA CAMARONA ABSCISA 0+000.00 LADO IZQUIERDO AGUAS ABAJO (ENTREGA DE TUBERÍA DE CONDUCCIÓN).....	36
FIGURA 3.3. CAUCE NATURAL DEL RÍO LA CAMARONA ABSCISA 0+000.00 LADO DERECHO AGUAS ABAJO (ENTREGA DE TUBERÍA DE CONDUCCIÓN).....	37
FIGURA 3.4. CAUCE NATURAL DEL RÍO LA CAMARONA ABSCISA 1+000.00 AGUAS ABAJO.....	38
FIGURA 3.5. CAUCE NATURAL DEL RÍO LA CAMARONA ABSCISA 4+100.00 AGUAS ARRIBA. COTA APROXIMADA 176M.....	39
FIGURA 3.6. CAUCE NATURAL DEL RÍO LA CAMARONA ABSCISA 9+600.00 AGUAS ARRIBA.....	40
FIGURA 3.7. CAUCE NATURAL DEL RÍO LA CAMARONA ABSCISA 9+600.00 AGUAS ABAJO. SE PRODUCE UN CAMBIO EN LA GEOMORFOLOGÍA DEL RÍO.....	40
FIGURA 3.8. CAUCE NATURAL DEL RÍO LA CAMARONA ABSCISA 9+600.00 AGUAS ABAJO. APARICIÓN DEL NIVEL FREÁTICO. COTA APROXIMADA 140M.....	41
FIGURA 3.9. CAUCE NATURAL DEL RÍO LAS BALSAS AGUAS ARRIBA, ABSCISA 10+500.00 EN COMUNA ICERAS. COTA APROXIMADA DEL NIVEL FREÁTICO 135M.....	42

FIGURA 3.10. CAUCE NATURAL DEL RÍO LAS BALSAS AGUAS ABAJO, ABSCISA 10+500.00 EN COMUNA ICERAS.....	42
FIGURA 3.11. CONSTRUCCIÓN DE POZO, ABSCISA 10+500.00 EN COMUNA ICERAS.....	43
FIGURA 3.12. CAUCE NATURAL DEL RÍO LAS BALSAS AGUAS ARRIBA, ABSCISA 17+500.00. COTA APROXIMADA DEL NIVEL FREÁTICO 89M. ....	44
FIGURA 3.13. CAUCE NATURAL DEL RÍO LAS BALSAS AGUAS ARRIBA, ABSCISA 22+000.00. COTA APROXIMADA DEL NIVEL FREÁTICO 70M. ....	45
FIGURA 3.14. CAUCE NATURAL DEL RÍO LAS BALSAS AGUAS ABAJO, ABSCISA 22+000.00. USO DE TARABITA PARA CRUZAR EL RÍO EN ÉPOCAS INVERNALES. ..	45
FIGURA 3.15. PRUEBA CON GASTO VARIABLE ABSCISA 0+000.....	52
FIGURA 3.16. PRUEBA CON GASTO VARIABLE ABSCISA 1+000.....	52
FIGURA 3.17. PRUEBA CON GASTO VARIABLE ABSCISA 4+100.....	53
FIGURA 3.18. PRUEBA CON GASTO VARIABLE ABSCISA 9+600.....	53
FIGURA 3.19. TENDENCIA DEL CAUDAL INFILTRADO EN EL RÍO LA CAMARONA.....	57

## RESUMEN

Desde el inicio de los tiempos, el ser humano está en constante evolución y a medida que va evolucionando, el hecho de satisfacer sus necesidades se convierte en un tema imperativo. El agua, como elemento vital resulta indispensable no sólo para el ser humano sino para todo ser vivo; es por esto que la correcta y eficaz utilización y optimización de este recurso natural es de suprema importancia.

Partiendo de la premisa anterior se puede concluir, que durante la conducción del agua a través de cauces naturales o artificiales, las pérdidas producidas por infiltración toman mayor importancia cuando el agua es un recurso limitado y escaso y se la tiene que conservar por su elevado costo.

Estas pérdidas, que pueden ser grandes, reducen la eficiencia de la conducción y son influenciadas por factores topográficos, geológicos, hidrogeológicos, constructivos, etc., esto es: la ubicación y trazado del canal o cauce natural y su perfil hidráulico, la permeabilidad de los suelos de un cauce natural, la función del nivel freático original antes de la conducción y el espesor de revestimiento en el caso de canales revestidos. Estos temas son de gran relevancia al momento de realizar un análisis de infiltración.

La estimación de las pérdidas por infiltración es una actividad básica en un proyecto de conducción de agua pues su conocimiento permitirá establecer las acciones a tomar en el diseño para prevenirlas o reducirlas.

Si bien es cierto que el presente trabajo muestra un análisis de pérdidas por infiltración, el autor recomienda la realización de estudios más detallados como complemento.

**Palabras Claves:** Conducción, cauce, infiltración, pérdidas, eficiencia, permeabilidad, nivel freático.

# **CAPÍTULO 1**

## **ANTECEDENTES, OBJETIVOS, ALCANCE Y CARACTERÍSTICAS DEL SISTEMA**

# **1. ANTECEDENTES, OBJETIVO, ALCANCE Y METODOLOGÍA**

## **1.1.- Antecedentes:**

Actualmente para el desarrollo de la agricultura y el desarrollo humano, en la Provincia de Santa Elena se bombea agua desde el Río Daule hasta el Embalse Chongón y desde Chongón se bombea agua al Canal Sube y Baja llegando esta hasta el Estero Bejuco.

Este caudal llega hasta el Embalse de la Presa Azúcar, desde donde se abastece de agua cruda a la Planta de Tratamiento de agua potable de Atahualpa, para el consumo de las poblaciones de Salinas, La Libertad, Santa Elena y otras.

Para alimentar el Embalse de la Presa San Vicente, para fines agrícolas y de consumo humano, se ha previsto el incremento de los grupos de bombeo en la estación de Chongón, para igualmente incrementar (duplicar) el caudal del canal Chongón Sube y Baja hasta el Estero Bejuco.

El caudal que llegará al Estero Bejuco será regulado y manejado a través de una derivadora y luego será conducido por gravedad a través de un canal de aproximadamente 5.60 Km de longitud.

El caudal que se conducirá por el Canal Bejuco será almacenado en el Reservoirio Leoncito. Del reservoirio Leoncito se bombeará el caudal de  $4.60\text{m}^3/\text{seg}$  con 4 bombas, a través de 3km de tubería de acero a una altura de 120m; luego este caudal será conducido por gravedad a través de 2.00Km de tubería de PRFV para ser entregado al cauce natural del sistema hidrográfico del río La Camarona y del río Balsas, para que finalmente desemboque en el Embalse San Vicente.



### **1.2.2.- Objetivos específicos:**

- Calcular el coeficiente de permeabilidad teórico promedio en terrenos estratificados.
- Realizar pruebas de campo que determinen un coeficiente de permeabilidad real para posteriormente calcular el caudal de infiltración.

### **1.3.- Alcance:**

En el presente trabajo se realizará un análisis de pérdidas por infiltración que se producirían durante la conducción de un caudal adicional, transportado a través de cauces naturales.

Para esto se dispondrá de ensayos de suelos correspondientes a lo requerido en el presente estudio y realizados en los cauces del río La Camarona y del río Balsas, dichos ríos conforman un sistema de conducción hasta desembocar en el Embalse San Vicente.

Se realizará un estudio de los posibles métodos a utilizar, tanto analíticos como empíricos, y la determinación de la conductividad hidráulica in situ para calcular el coeficiente de permeabilidad y posteriormente el caudal unitario de infiltración.

Será necesario reconocer la ubicación del nivel freático en los sectores a estudiar, ya que esto delimita un correcto estudio de las pérdidas por infiltración.

La topografía de los puntos donde se ejecutarán las pruebas en sitio será indispensable, porque es necesario conocer el perímetro mojado y otras características naturales para emplearlos como datos en los métodos analíticos.

Cuando se cuantifiquen las pérdidas de infiltración totales producidas, se concluirá con recomendaciones a tomar en el diseño para prevenir o reducir dichas pérdidas, de esta manera se contribuirá posiblemente con la

eficiencia de la conducción y la conservación adecuada del agua debido a su elevado costo, por su triple bombeo indicado en el inciso 1 del presente capítulo.

#### **1.4.- Características del sistema “La Camarona – Balsas”:**

##### **1.4.1.- Generalidades sobre la infiltración:**

Para conocer un poco más sobre las características del sistema “La Camarona – Balsas, es necesario mencionar ciertos conceptos y procesos básicos de la infiltración:

La infiltración se refiere al proceso del movimiento del agua en un canal, dentro del material de su lecho y paredes.

Inicialmente, el agua debe primero satisfacer la falta de humedad que existe en el suelo, luego cuando se produzca el bombeo y se sature el suelo, cualquier exceso empieza a formar parte del agua subterránea.

La rapidez con que el agua penetre en el suelo, dependerá de su capacidad de transmisión y esta depende de los horizontes que tenga el perfil del suelo.

Si la entrada del agua en la superficie del suelo es menor que la transmisión más baja de cualquier horizonte del suelo, la infiltración quedará supeditada.

Cuando el suelo esté saturado, la capacidad de infiltración estará limitada por la menor transmisión del agua infiltrada.

El almacenaje que se produzca en el suelo de un río, depende directamente de la porosidad, espesor y contenido de humedad que este contenga.

La porosidad del suelo depende del contenido de materia orgánica, textura, estructura y otros factores.

La infiltración en un río irá disminuyendo conforme se agote la capacidad de almacenaje de los estratos superiores al estrato que tiene la menor transmisión.

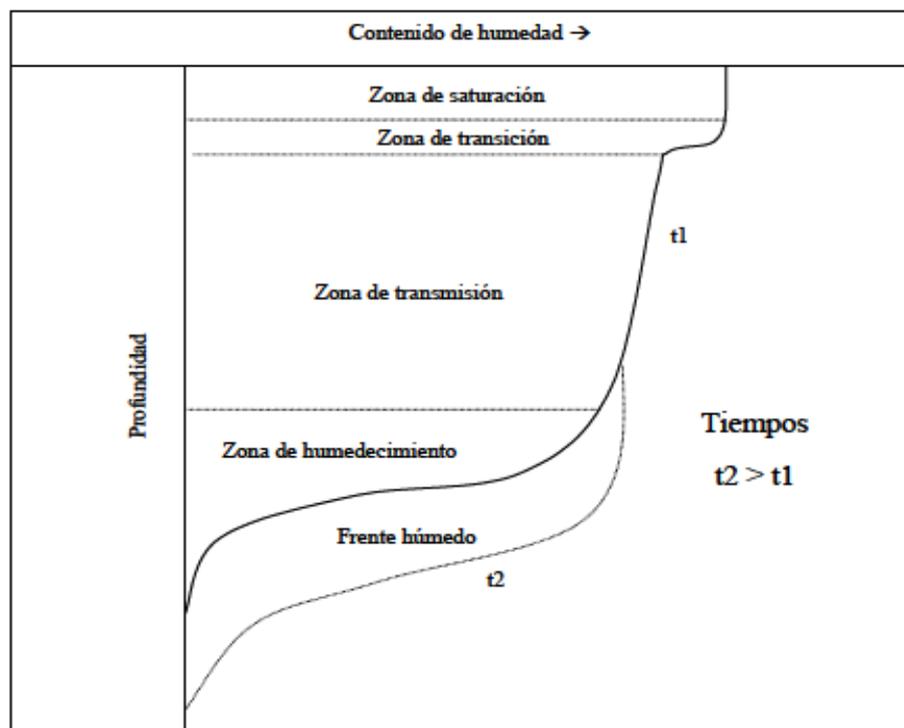
Se puede deducir claramente, que el tamaño y distribución de los poros estarán directamente relacionados con la capacidad de infiltración.

El perfil de humedad de un río se lo puede dividir en cuatro zonas:

- Zona de saturación y transición
- Zona de transmisión
- Zona de humedecimiento
- Frente de humedad o frente húmedo

#### 1.4.2.- El sistema “La Camarona – Balsas”:

El sistema “La Camarona – Balsas” está conformado por la confluencia del río La Camarona con el río Balsas, el cual desemboca en el Embalse de San Vicente.



**Figura 1.2.** Perfil de humedad de un río.

En este sistema, por tener corrientes efímeras y mientras no se entregue agua mediante bombeo, sólo habrá un escurrimiento subterráneo. Si se entrega agua mediante bombeo, entonces se tendrá escurrimiento superficial una vez que se abastezca la capacidad de almacenaje del suelo. Esto último sólo ocurrirá básicamente en las temporadas de estiaje.

La trayectoria del río La Camarona hasta la confluencia con el río Balsas es aproximadamente de 7,40 Kilómetros y su pendiente media es del 1,60%.

El río Balsas tiene una longitud de 18 Kilómetros entre su confluencia con el río La Camarona y el Embalse San Vicente y su pendiente media es del orden de 0,40%.

Es necesario mencionar que en relación con estas pendientes, en las partes más altas se encuentran las mayores velocidades y el material transportado está formado por partículas gruesas. En las partes bajas, las velocidades son menores y es menor también el diámetro del material transportado.

Estudios preliminares han verificado que el suelo del río La Camarona está principalmente conformado por un material arcilloso y el río Las Balsas está conformado principalmente por arenas finas y gravas.

Calicatas realizadas en el lecho del río La Camarona determinaron en todos los pozos la existencia de arcillas de plasticidad media (CL) con límites líquidos variando entre 29% y 47% y su granulometría indica que el porcentaje pasante del tamiz número 200 varía entre 51% y 90%. A su vez los índices de plasticidad varían entre 10 y 20%.

Estas consideraciones llevarían a presumir que la infiltración en el río La Camarona no parece ser lo más relevante, pudiéndose estimar por las características de sus materiales de cauce que su permeabilidad estaría en el rango de  $1 \times 10^{-6}$  cm/seg a  $1 \times 10^{-4}$  cm/seg.

En contraste, en el río Balsas se debería investigar de mejor manera los materiales que componen los depósitos aluviales, su potencia y

características hidráulicas, toda vez que el canal natural tiene una mayor longitud y menor pendiente que el río La Camarona.

En el lugar donde el suelo predominante del cauce del río sea la arena, los poros son más estables, aunque se puede formar una mezcla más densa, este es el caso principalmente del río Las Balsas.

En los lugares donde predomina la arcilla y en épocas secas, los poros son más largos y pueden desintegrarse durante el bombeo ya que ciertos sedimentos pueden depositarse y de esta manera sellar dichos poros. Estos lugares por tener material coloidal, cuando este está en presencia de agua se hincha, por eso, un cambio en la permeabilidad de la masa es más frecuente que en las arenas.

Parecería ser de acuerdo a las características físicas de cada cauce, que el problema fundamental a estudiar en el caso del río La Camarona sería el proceso erosivo que podría originar la existencia de un caudal permanente de 4,60 m<sup>3</sup>/seg a ser transportado desde la cabecera de su cauce, en tanto que en el tramo del río Balsas su problema fundamental sería la infiltración.

Sin embargo, el presente trabajo analizará las infiltraciones tanto para el río La Camarona como para el río Balsas.

#### **1.4.3.- Erosión del sistema “La Camarona – Balsas”:**

Aumentar el caudal al río La Camarona puede ser una de las principales causas de erosión, porque aumenta la velocidad media de la corriente, la capacidad de transporte y la fuerza tractiva. Esto puede producir un acorazamiento del lecho, una erosión generalizada, erosiones locales en determinados puntos, etc.

Además, por presentar muchos meandros, en el extradós de sus curvas hay tendencia a la erosión, mientras que en el intradós hay tendencia a la sedimentación (Fenómenos propios de la dinámica fluvial).

Es preciso tener en cuenta, cuando se contribuya con el caudal de 4.60 m<sup>3</sup>/s, que es muy probable que ocurra una erosión acelerada, la cual se genera cuando se alteran las condiciones naturales que son generalmente producidas por cambios de clima, acción de fuerzas geológicas, acción de animales, pero sobre todo, y como sucedería en este caso, debido a las acciones humanas.

La erosión en el río La Camarona producirá un cambio en el terreno natural, modificando su pendiente original (denominada pendiente endogenética) a una pendiente nueva (denominada pendiente exogenética), esto se debe a que en algunos lugares existe remoción de materiales y en otros se produce la sedimentación, a no dudarlo en el cauce del río Balsas y lo que es peor, podría llegar hasta el Embalse de la Presa San Vicente.

En el sistema La Camarona-Balsas, a simple inspección, el movimiento de los sólidos es un proceso intermitente. El material es transportado por la corriente hasta un punto donde luego es depositado. Luego, el material es erosionado y transportado hasta otro lugar donde se vuelve a sedimentar; esto forma parte de un proceso repetitivo, el cual puede demorar años para que el material sólido llegue a la desembocadura del río en el Embalse.

El agente erosivo más poderoso e importante que se puede presentar en este sistema, es el agua, transporta partículas sólidas y sustancias químicas que contribuyen al proceso de erosión, sin embargo arrastra en muchas ocasiones tierras fértiles evitando así la desertificación, por lo que se encuentra suficiente vegetación tanto en el cauce como en el área circundante del río.

Actualmente en el sistema ya se presenta un proceso erosivo, en donde se puede observar que la erosión producida es de tipo normal, laminar y en surcos.

Como quedó dicho anteriormente este trabajo no incluye el estudio de la erosión del río La Camarona.

## **CAPÍTULO 2**

# **MÉTODOS PARA DETERMINAR LA CONDUCTIVIDAD HIDRÁULICA E INFILTRACIÓN EN CANALES**

## **2.MÉTODOS PARA DETERMINAR LA CONDUCTIVIDAD HIDRÁULICA Y LA INFILTRACIÓN EN CANALES**

### **Introducción:**

Para realizar el cálculo de las pérdidas por infiltración en el sistema La Camarona – Balsas, es necesario conocer ciertas características del sistema como lo son principalmente para este estudio el valor de la conductividad hidráulica del suelo, la ubicación del nivel freático, la geometría del canal y el tirante de agua; hecho por el cual su correcta determinación es de gran relevancia.

### **2.1.- Métodos para determinar la conductividad hidráulica:**

La magnitud de las infiltraciones están en función del tamaño y granulometría de la cantidad de finos, las partículas gruesas y de la densidad de la mezcla, características propias del suelo ubicado en el cauce del río.

#### **2.1.1- Métodos in situ:**

Para poder determinar los coeficientes de permeabilidad en el río La Camarona y en el río Balsas, se podría aplicar tres métodos:

1. Pruebas de bombeo: Se bombea agua de un pozo con un gasto constante, simultáneamente se observa el descenso del nivel freático en pozos colocados en líneas radiales a diferentes distancias del pozo en que se bombea. Son de costo elevado.
2. Pruebas observando la velocidad del flujo: Se mide por la rapidez con que se mueve el agua teñida o con un electrolito desde un punto de inyección a un pozo de observación. Son de costo elevado.

**3. Pruebas de inyección:** Se bombea agua dentro de un pozo de prueba, observando las filtraciones bajo una carga determinada.

Son relativamente económicas, sin embargo los resultados sólo son considerados como aproximaciones.

Una de sus ventajas es que se puede determinar la permeabilidad de cada estrato.

La prueba que más satisfará las necesidades del estudio será la prueba de inyección, debido a que serán datos reales y de campo, ya que los estratos del suelo rara vez se presentan de manera uniforme como se asume en pruebas de laboratorio; en las pruebas de bombeo será considerada la forma y ubicación real de los estratos.

Cuando ya se obtengan los resultados de las pruebas, se puede determinar la cantidad de infiltración subterránea usando la fórmula de Darcy en caso de que se considere un caudal permanente.

La precisión para determinar las infiltraciones subterráneas depende de la homogeneidad que presente el suelo y de la precisión con que se determine el coeficiente de permeabilidad.

Como generalmente el suelo posee diferentes estratos, la permeabilidad vertical será mucho menor que la horizontal, y las capas permeables en la profundidad no son muy efectivas para permitir el paso de la infiltración.

#### **2.1.2.- Movimiento del fluido en el suelo:**

Hacer un análisis de flujo a través de todos los poros que existen en el suelo del cauce, no sería posible. Los poros son tan delgados, sinuosos e irregulares en su sección transversal y complejos en su intersección y subdivisión.

En el año de 1856, Darcy<sup>5</sup> investiga las características del flujo de agua a través de filtros de material térreo. Luego, definiría una ley que determina el

flujo de agua a través de medios porosos. Menciona que para velocidades suficientemente pequeñas el caudal es:

$$(2.1) \quad Q_p = k * i * A$$

Siendo:

$Q_p$  = Descarga en la unidad de tiempo

Si además se considera la ecuación de la continuidad, se obtiene:

$$(2.2) \quad Q = V * A$$

Relacionando las dos fórmulas anteriores:

$$(2.3) \quad V = k * i$$

Donde:

$V$  = Velocidad (cm/seg)

$Q$  = Caudal o gasto (cm<sup>3</sup>/seg)

$A$  = Área transversal (cm<sup>2</sup>)

$K$  = Coeficiente de permeabilidad (cm/seg)

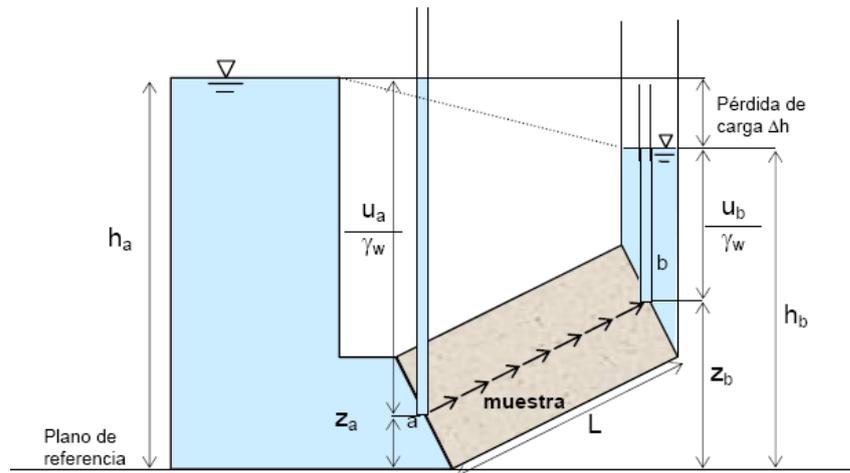
$i$  = Gradiente hidráulico (adimensional)

### **Gradiente Hidráulico:**

Para describir la circulación del agua dentro de un medio poroso, se lo hace con líneas de infiltración.

Las líneas de infiltración son las curvas descritas por el escurrimiento a través de un material permeable. El agua que se encuentra circulando en el suelo, sigue trayectorias que se desvían erráticamente de las líneas de infiltración, aunque relativamente poco.

Si las líneas de infiltración fueran rectas y paralelas entre sí, se puede hablar de que la infiltración producida es lineal.



**Figura 2.1.** Línea de infiltración presentada en una muestra de suelo.

La línea de infiltración está representada por la recta que forman la unión de puntos “a” y “b”, dentro de una muestra de suelo.

Como se puede observar, tanto en el punto “a” como en el punto “b” se han colocado tubos piezométricos para indicar el nivel al que se eleva el agua en dichos puntos.

En cualquier punto de la muestra, la carga total se define como:

$$(2.4) \quad h = Z + \frac{U}{\gamma_w} + \frac{V^2}{2 \cdot g} \quad (m)$$

$Z$  = Carga de posición en un punto, respecto a un eje de referencia (m)

$U/\gamma_w$  = Carga por presiones neutras (m)

$U$  = Presión neutra ( $\text{KN/m}^2$ )

$\gamma_w$  = Peso específico del agua, ( $\text{KN/m}^3$ )

$\frac{V^2}{2 \cdot g}$  = Carga de velocidad (m)

$V$  = Velocidad (m/seg)

$g$  = Aceleración de la gravedad, (m/seg<sup>2</sup>)

Generalmente en los problemas de flujo de agua subterránea, la carga por velocidad es suficientemente pequeña y puede ser despreciada.

Observando la figura y comparando los valores de carga total en el punto “a” y en el punto “b”, se puede notar una diferencia entre ellos, esta diferencia que existe es la pérdida de carga o la carga hidráulica “ $\Delta h$ ”. Por ejemplo:

$$(2.5) \quad \Delta h = h_a - h_b \quad (m)$$

Es necesario mencionar que para que exista la debida circulación, debe existir una diferencia de carga total, donde  $h_a > h_b$ , sin importar las posiciones de los puntos, es decir su valor “z”.

Si se vincula la pérdida de carga con el recorrido de la línea de infiltración, se obtiene el gradiente hidráulico “ $i$ ” y se considera positiva la dirección de la corriente:

$$(2.6) \quad i = \frac{\Delta h}{L} \quad (\text{adimensional})$$

$L$  = Longitud del recorrido en la muestra de suelo. (m)

Si se relaciona el gradiente hidráulico con el peso específico del fluido, se obtiene el gradiente de presiones:

$$(2.7) \quad i_p = \gamma_w * i = \gamma_w * \frac{\Delta h}{L} \quad (KN/m^3)$$

### **2.1.3.- Velocidad de descarga (Darcy):**

Darcy además en sus estudios menciona a la velocidad de descarga, la cual se define como la cantidad de agua que circula a través de una superficie unitaria perpendicular a las líneas de filtración en la unidad de tiempo.

Considera que en ciertos suelos de granos finos y en arenas firmes también saturadas, donde la circulación del agua no afecta la estructura del material, la velocidad “ $v$ ” puede ser determinada por:

$$(2.8) \quad V = ip * \frac{K}{n} \quad (cm/seg)$$

n = Viscosidad del agua. (KN\*seg/cm<sup>2</sup>)

K = Constante de permeabilidad. (valor empírico) (cm<sup>2</sup>)

ip = Gradiente de presiones. (KN/cm<sup>3</sup>)

Es necesario considerar que el valor K es constante para un material permeable, con porosidad dada y además es independiente de las propiedades físicas que tenga el líquido que filtra por el material y que la viscosidad del agua disminuye a medida que la temperatura aumenta.

Reemplazando “ ip ” por “ i\*γw ” se tiene:

$$(2.9) \quad V = i * \gamma_w * \frac{K}{n}$$

Generalmente las infiltraciones de agua se considera que ocurren a poca profundidad y con muy poca variación en la temperatura del líquido, de tal forma que “ γw ” es casi constante, por lo que es costumbre presentar la ecuación de la siguiente manera:

$$(2.10) \quad V = k * i$$

Donde:

$$(2.11) \quad k = \gamma_w * \frac{K}{n} \quad \left(\frac{cm}{seg}\right)$$

k = es el coeficiente de permeabilidad. Se expresa como una función de la constante de permeabilidad del material, la viscosidad y el peso específico del fluido circulante.

Entonces, el valor de “k”, expresado en (cm/seg) puede ser considerado como la velocidad del agua a través de un suelo cuando está sujeta a un gradiente hidráulico unitario.

Existen varios factores que influyen en el momento de calcular el valor del coeficiente de permeabilidad del suelo, por ejemplo:

**Relación de Vacíos:** Si el volumen de vacíos disminuye, entonces la permeabilidad del suelo también disminuye. Esto ocurre generalmente si un suelo es vibrado o comprimido.

Casagrande propone una ecuación para relacionar el coeficiente de permeabilidad con la relación de vacíos:

$$(2.12) \quad k = 1.40 * e^2 * k_{0.85}$$

$k_{0.85}$  = Valor del coeficiente de permeabilidad para una relación de vacíos de  $e=0.85$ .

#### **2.1.4.- Estructura y estratificación:**

Es preciso mencionar que el coeficiente de permeabilidad de un suelo remoldeado es diferente al del mismo suelo intalterado.

En el caso del suelo remoldeado, las partículas quedan libres, el líquido las mueve y las reacomoda. En otras ocasiones son arrastradas al exterior, esto produce un cambio en el coeficiente de permeabilidad. Generalmente esto ocurre en suelos con valores de coeficiente de permeabilidad "k" entre  $10^{-5}$  y  $10^{-3}$  cm/seg.

Hay que considerar que los coeficientes de permeabilidad horizontal y vertical difieren la mayor parte de las veces y a su vez los valores en sentido horizontal pueden ser diferentes si el suelo presenta estratificación.

Además, el efecto de la vegetación, de ciclos de secado y humedecimiento del suelo y los organismos pequeños pueden cambiar las condiciones del suelo, provocando de esta manera discontinuidades, agujeros, fisuras, etc. Estos factores producen que las características de permeabilidad de suelos sean diferentes.

Otro factor que afecta a la permeabilidad del suelo es el tamaño de partículas.

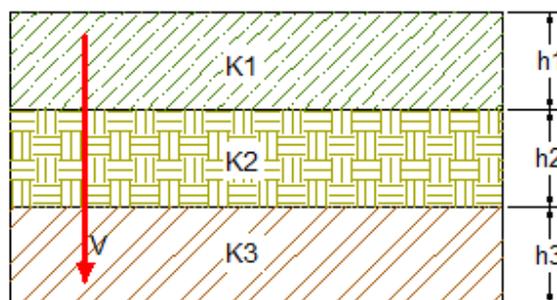
### **2.1.5.- Permeabilidad en terrenos estratificados:**

Debido a que los suelos presentan diferentes estratos, los valores del coeficiente de permeabilidad son igualmente diferentes, tanto en la dirección horizontal como en la dirección vertical.

Considerando los diferentes estratos y con valores  $K_1, K_2, K_3, \dots, K_n$ , a los coeficientes de permeabilidad con sus respectivos espesores, es posible deducir una fórmula que determine el valor promedio de los coeficientes de permeabilidad, tanto en dirección perpendicular a los planos de estratificación como en dirección paralela.

En resumen, cuando el suelo presenta diferentes estratos, existe permeabilidad en sentido vertical y en sentido horizontal, suponiendo que cada estrato es homogéneo.

#### **2.1.5.1.- Permeabilidad en el sentido perpendicular a la dirección de los estratos:**



**Figura 2.2.** Permeabilidad Vertical.

Considerando que el flujo es perpendicular a las capas y va en dirección de arriba hacia abajo, su velocidad será:

$$(2.13) \quad V = Km * i$$

Y el caudal unitario “q” será:

$$(2.14) \quad q = V * A$$

$$A = H * 1$$

$$q = V * H * 1$$

$$(2.15) \quad q = Km * i * H$$

El gradiente hidráulico a través del acuífero estratificado es:

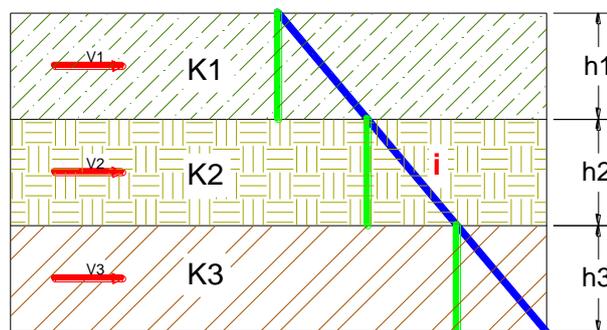
$$(2.16) \quad V = \left(\frac{\Delta H}{H}\right) * Kmv = K_1 i_1 = K_2 i_2 = K_3 i_3$$

$$\frac{Kmv * (h_1 i_1 + h_2 i_2 + h_3 i_3)}{H} = V$$

$$Kmv = \frac{H}{\frac{h_1 i_1}{K_1 i_1} + \frac{h_2 i_2}{K_2 i_2} + \frac{h_3 i_3}{K_3 i_3}}$$

$$(2.17) \quad Kmv = \frac{\sum hi}{\sum \frac{hi}{K_i}}$$

**2.1.5.2.- Permeabilidad en el sentido paralelo a la dirección de los estratos:**



**Figura 2.3.** Permeabilidad Horizontal.

Si el sentido del flujo es paralelo a los planos de estratificación, se puede asimilar el caudal total y se obtendrá un coeficiente de permeabilidad horizontal media “K<sub>mh</sub>”.

El caudal unitario del flujo en cada capa será:

$$(2.18) \quad q = V * A = K * i * h * 1$$

$$q_1 = K_1 * i * h_1$$

$$q_2 = K_2 * i * h_2$$

$$q_3 = K_3 * i * h_3$$

Por consiguiente el caudal total será la suma de los caudales unitarios:

$$(2.19) \quad q = q_1 + q_2 + q_3$$

$$q = K_1 * i * h_1 + K_2 * i * h_2 + K_3 * i * h_3$$

$$q = i * (K_1 * h_1 + K_2 * h_2 + K_3 * h_3)$$

$$(2.20) \quad q = K_{mh} * H * i$$

Igualando:

$$K_{mh} * H * i = i * (K_1 * h_1 + K_2 * h_2 + K_3 * h_3)$$

$$K_{mh} = \frac{K_1 * h_1 + K_2 * h_2 + K_3 * h_3}{H}$$

$$(2.21) \quad K_{mh} = \frac{\sum K_i * h_i}{H}$$

### 2.1.6.- Fórmulas empíricas para determinar “K” coeficiente de permeabilidad:

El coeficiente de permeabilidad “K” puede determinarse por medio de fórmulas empíricas, utilizando permeámetros tanto de nivel constante como de nivel variable, y en el campo con los métodos mencionados anteriormente.

Allen Hazen propone la siguiente fórmula para determinar el coeficiente de permeabilidad para arenas flojas y uniformes:

$$(2.22) \quad K = c * (d_{10})^2$$

K = cm/seg.

d<sub>10</sub> = diámetro efectivo.

C = constante cuyo valor varia entre 100 – 150 (se considera 116 como un buen valor promedio).

Cuando se toma en cuenta la temperatura T, esta fórmula se escribe:

$$(2.23) \quad K = c * (0.70 + 0.03T) * (d_{10})^2$$

En cambio, Terzaghi considera la variabilidad de las secciones de los canales capilares del suelo y define al coeficiente de permeabilidad de la siguiente manera:

$$(2.24) \quad K = \frac{c}{\eta} * \frac{(n-0.13)^2 * (d_{10})^2}{\sqrt[3]{1-n}}$$

K = coeficiente de permeabilidad.

C = coeficiente empírico (800 arenas redondeadas y 460 arenas angulares).

η = coeficiente de viscosidad

n = porosidad.

d10 = diámetro efectivo.

Sin embargo, estas fórmulas no se pueden emplear para las arcillas, por lo que Terzaghi propone:

$$(2.25) \quad K = \frac{c}{\eta_o} * \frac{\eta_o}{\eta_t} * (e - 0.15)^3 * (1 + e) * (d10)^2$$

e = índice de vacíos

$\eta_o$  = viscosidad del agua a 20°C

$\eta_t$  = viscosidad del agua a la temperatura t

### **2.1.7.- Ensayos en laboratorio:**

#### **2.1.7.1.- Permeámetro de carga constante:**

Se emplea generalmente para suelos granulares (arena) y el coeficiente de permeabilidad es determinado mediante un nivel constante de la cantidad de agua. El agua atraviesa una muestra de suelo cuya sección es conocida y cuya longitud también en un determinado tiempo.

La cantidad de agua que atraviese la muestra es recogida en un recipiente para su posterior medición.

Se conoce que:

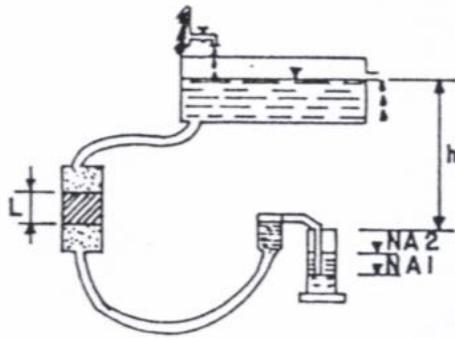
$$Q = K * \frac{h}{L} * A * t = V * A * t$$

Siendo:

h = desnivel entre la superficie de entrada y salida del agua.

Entonces se obtiene:

$$(2.26) \quad K = \frac{Q * L}{A * h * t}$$



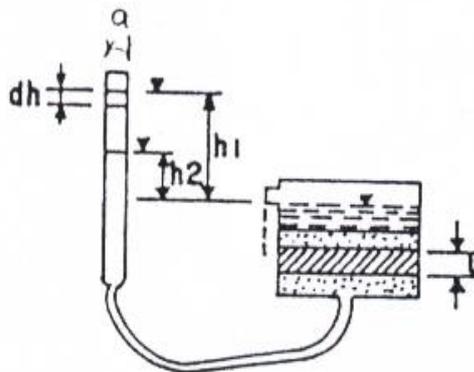
**Figura 2.4.** Permeámetro de Carga Constante.

**2.1.7.2.- Permeámetro de Nivel Variable:**

Es preferencialmente utilizado para los suelos finos y se considera un poco más ventajoso que el permeámetro de nivel constante.

La descarga “Q” es medida en la probeta graduada de sección “a”, durante un intervalo de tiempo “dt”. El nivel de agua decrece en un valor “dh”. Por lo que se obtiene:

$$(2.27) \quad K = 2.30 * \frac{L*a}{A*t} * \log \left( \frac{h_1}{h_2} \right)$$



**Figura 2.5.** Permeámetro de Carga Variable.

## **2.2.- Infiltración en Canales:**

Debido a la escasez de textos que traten específicamente el caso de infiltración en canales no revestidos, el autor tuvo que desplegar una extensa investigación bibliográfica para poder desarrollar el presente trabajo, que lo llevó a ubicar “papers” o publicaciones de gran relevancia que son las que más se acoplan a la problemática que se tiene como misión resolver.

Entre las cuales se tiene:

### **2.2.1.- Método de Dupuit:**

Título: Métodos analíticos para la estimación de la infiltración en canales en la parte sur de Australia.

Autores: Leanne Morgan, Graham Green and Cameron Wood.

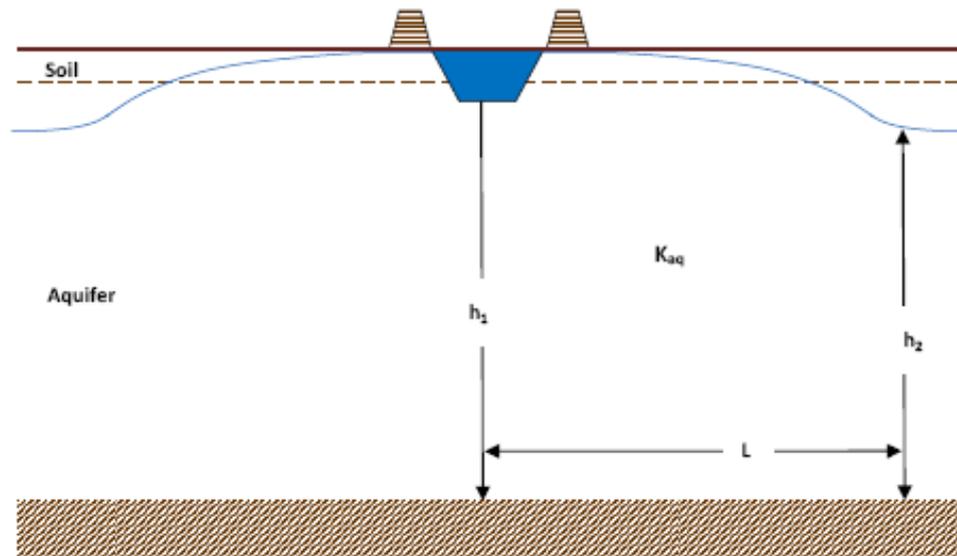
Entidad: Departamento del agua del Gobierno del Sur de Australia.

Este método es un modelo analítico matemático para condiciones de flujos unidireccionales y estacionarios y asume la homogeneidad e isotropía del acuífero, del Acuitardo y del suelo superficial.

Este método se ha dividido en tres casos basados principalmente en la variedad de las condiciones físicas del campo.

#### **Caso 1:**

Flujo saturado: El canal intersecta el acuífero y el nivel freático es superficial.



**Figura 2.6.** Método de Dupuit. Caso 1.

La forma del nivel freático aparenta una parábola convexa separada del canal, en concordancia con las condiciones de frontera de la ecuación de Dupuit y despreciando la evaporación del nivel freático.

Para este caso, el suelo se muestra como una capa de baja conductividad que posee espesor variable desde la superficie.

El acuífero no se muestra confinado y es relativamente de alta conductividad hidráulica.

Se denomina Acuitardo a la capa ubicada debajo del acuífero que debe ser impermeable.

Este caso se aplica cuando el canal intercepta al acuífero y el nivel freático está por debajo del nivel de agua ubicado dentro del canal. Adicionalmente el acuífero se encuentra saturado.

Para este caso se puede utilizar la ecuación de Dupuit, que describe un flujo permanente a través de un acuífero no confinado que descansa sobre una superficie impermeable horizontal.

La ecuación de Dupuit asume flujo horizontal para las infiltraciones del canal, esta suposición es válida cuando la profundidad de la capa freática a partir del nivel de agua en el canal se asume que está en la superficie del suelo y es menor que aproximadamente dos veces el ancho del canal.

Si la profundidad del nivel freático es menor a diez metros desde la superficie del suelo, entonces se puede decir que el flujo efectivamente es horizontal.

Usando la ecuación de Dupuit y asumiendo una sección simétrica del canal, las pérdidas por infiltración están dadas por:

$$q = \frac{K_{aq}(h_1^2 - h_2^2)}{L}$$

(2.27)

**q** = es la tasa de infiltración por metro de canal (m<sup>3</sup>/d/m)

**K<sub>aq</sub>** = es la conductividad hidráulica del acuífero (m/d)

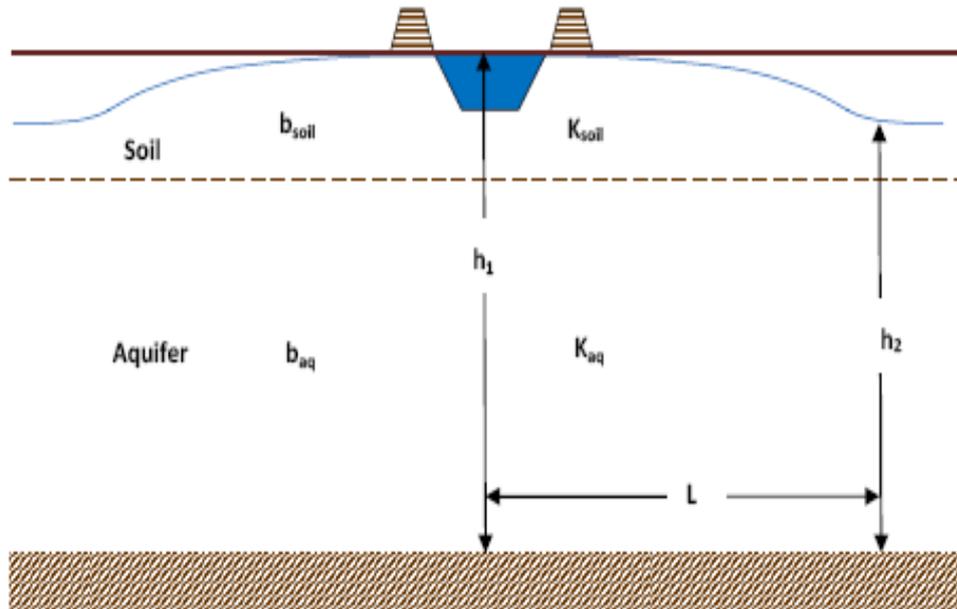
**h<sub>1</sub>** = es la elevación de la carga hidráulica del agua en el canal (m), calculada usando como base la capa impermeable. Este valor está estimado sumando el espesor saturado de la capa impermeable, la profundidad del nivel freático y el nivel del agua en el canal, que puede estar arriba o debajo de la superficie del suelo.

**h<sub>2</sub>** = es la carga hidráulica del acuífero en metros a una distancia L desde el canal, donde el nivel freático no se ve afectado por el flujo del canal. La carga es calculada usando la ubicación de la capa impermeable como datum.

Bouwer en 1965 definió la distancia "L", como diez veces el ancho de la base del canal. Mientras esta aproximación incorpora el tamaño del canal, sigue siendo un valor arbitrario y debería idealmente ser ajustado por medio de mediciones de campo.

**Caso 2:**

Flujo saturado: El canal y el nivel freático se ubican en la capa de suelo.



**Figura 2.7.** Método de Dupuit. Caso 2.

Este caso se aplica cuando el canal se ubica en la capa de suelo, con al menos cincuenta centímetros de suelo debajo de la parte inferior del canal. Aquí se muestra un flujo saturado debajo del canal y sobre la capa impermeable de suelo.

En este caso, un promedio de conductividad hidráulica de suelo y acuífero debe ser usado ( $K_{av}$ ). Bear en 1979 propone una fórmula para determinar la conductividad promedio para el suelo y el acuífero.

$$(2.28) \quad K_{av} = \left( \frac{1}{b_{soil} + b_{aq}} \left( \frac{b_{soil}}{K_{soil}} + \frac{b_{aq}}{K_{aq}} \right) \right)^{-1}$$

$K_{aq}$  = Conductividad hidráulica del acuífero (m/d)

$K_{soil}$  = Conductividad hidráulica del suelo (m/d)

bsoil = Espesor de la capa de suelo (m)

baq = Espesor de la capa del acuífero (m)

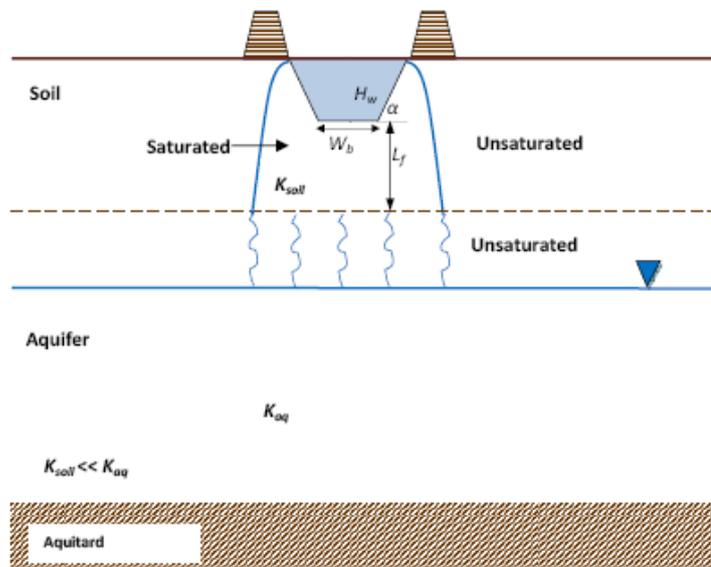
Para el cálculo de las pérdidas por infiltración se suele aplicar el concepto del caso 1:

$$q = \frac{K_{av}(h_1^2 - h_2^2)}{L}$$

(2.29)

### Caso 3:

Flujo no saturado. El canal se ubica dentro de una capa de suelo de baja conductividad y está muy lejano del nivel freático.



**Figura 2.8.** Método de Dupuit. Caso 3.

Este caso se aplica cuando el canal se ubica en una capa de suelo pero de baja conductividad, y debe haber al menos 0.50m de suelo debajo de la parte inferior del canal.

Existe flujo saturado desde el canal a través de la capa del suelo. El nivel freático está ubicado debajo de la capa de suelo y como el agua se mueve más rápido en un acuífero con mayor conductividad que en una capa de suelo con baja conductividad, las condiciones de flujo no saturado ocurrirán en el acuífero ubicado sobre el nivel freático. Esto resulta en una situación donde el flujo del canal está separado del nivel freático. La tasa de infiltración del canal es independiente de la localización del nivel freático y puede ser calculada aplicando la ley de Darcy a la capa de suelo y considerando cargas de presión negativa en la base del suelo, como mencionó Bouwer en el 2002.

$$q = W_p K_{soil} \frac{(H_w + L_f - h_{we})}{L_f}$$

(2.30)

Donde:

$q$  = Tasa de infiltración por metro de canal ( $m^3/d/m$ )

$W_p$  = Perímetro mojado del canal (m).

$K_{soil}$  = Conductividad hidráulica vertical saturada del suelo (m/d)

$L_f$  = Espesor de la capa del suelo desde la base del canal (m)

$h_{we}$  = Carga de presión negativa en la base de la capa de suelo. Este valor depende de las características del suelo, por lo que se presenta a continuación la siguiente tabla:

**Tabla 2.1.-** Valores típicos de carga de presión negativa  $h_{we}(m)$  (Bouwer, 2002).

Soil type	Negative pressure head $h_{we}$ (m)
Fine sands	-0.15
Loamy sands –sandy loams	-0.25
Loams	-0.35
Structured clays	-0.35
Dispersed clays	-1.00

### **2.2.2.- Solución analítica para el problema de infiltración en canales con fondo curvilíneo:**

Autor: Bhagu R. Chahar.

Entidad: Departamento de ingeniería civil, Instituto Indio de tecnologías Delhi, Nueva Delhi, India.

Este método menciona que hallar una solución analítica para la cantidad de infiltración en un canal semicircular no es posible por la dificultad que esto representaría. En este estudio un método inverso se utiliza para obtener una solución exacta para la infiltración de un canal curvo. La solución involucra el hodógrafo inverso y la transformada de Schwarz-Christoffel y también incluye ecuaciones paramétricas utilizadas para hallar la forma del perímetro del canal y los lugares geométricos posibles de la línea freática.

La forma del canal que presenta Bhagu Chahar es aproximada a la de una semielipse, con el ancho de la parte superior como el eje mayor y dos veces la profundidad del agua como el eje menor y viceversa.

El promedio de una elipse y una parábola da cercanamente la forma exacta del canal. Además, esta forma es viable para canales muy profundos y muy anchos.

#### **Conclusiones:**

La solución exacta de la cantidad de infiltración en un canal curvo puede ser obtenida usando el método inverso con el hodógrafo inverso y la transformada de Schwarz-Christoffel. La forma del canal es similar a la de una semielipse. Aproximadamente la forma del canal puede obtenerse promediando una elipse y una parábola. Un caso particular al caso de este canal curvo es una sección semicircular.

### **2.2.3.- Análisis de infiltración en canales prismáticos:**

Autor: Bhagu R. Chahar.

Entidad: Departamento de ingeniería civil, Instituto Indio de tecnologías Delhi, Nueva Delhi, India.

Para establecer una solución analítica exacta y así estimar la cuantificación de infiltración en un canal trapezoidal sustentado por una capa de drenaje, es necesario usar el hodógrafo inverso y la transformada de Schwarz-Christoffel.

La simetría existente al eje vertical de la sección del canal, ha sido utilizada para obtener la solución para uno de los lados del eje. La solución también incluye la relación de la variación de la velocidad de infiltración a lo largo del perímetro del canal y un conjunto de ecuaciones paramétricas para la localización de la línea freática.

Para este caso generalizado se han deducido soluciones particulares para canales rectangulares y triangulares con una capa de drenaje a una profundidad determinada, y para canales trapezoidales, rectangulares y triangulares con una capa de drenaje y un nivel freático a una profundidad infinita.

Estas soluciones son muy útiles para la cuantificación de pérdidas por infiltración y la recarga artificial de agua subterránea a través de canales prismáticos.

#### **Conclusiones:**

Este análisis incluye una variación en la velocidad de infiltración a lo largo del perímetro del canal. Aunque, las soluciones para la cantidad de infiltración, la localización de la línea freática y el espesor de la capa drenante contengan integrales impropias, estas pueden ser evaluadas por la integración numérica.

### **2.3.4.- Infiltración a través de capas saturadas y no saturadas:**

Autor: Dr. G. Kovács.

Entidad: Boletín de la Asociación Internacional de Hidrología Científica – Budapest, Hungría.

Esta publicación presenta un método unificado, el cual es aplicable para caracterizar todos los tipos de infiltración. Para este propósito, los diferentes tipos de infiltración son clasificados de la siguiente manera:

#### **1. Infiltración a través de un medio poroso:**

- Infiltración turbulenta
- Segunda zona de transición
- Primera zona de transición
- Infiltración laminar
- Microinfiltración.

#### **2. Infiltración en la zona no saturada**

La investigación dinámica de los varios grupos, hace posible la determinación de los límites numéricos entre las zonas de validez anteriormente mencionadas y la forma general de las ecuaciones de movimiento para cada grupo.

La base de esta investigación es una serie de números adimensionales formados como un cociente de la fuerza resistente dominante y la no dominante como en el caso de los límites de las zonas de validez, y determinada como una proporción de la principal fuerza resistente de gravedad actuante para deducir la forma general de las ecuaciones de movimiento.

Aparte de la forma dinámica de la investigación, el uso de un modelo físico construido a partir de tuberías rectas en vez de los canales de poros en el medio poroso fueron la base común de investigación para los diferentes tipos de infiltración.

El chequeo del modelo propuesto testifica que las tuberías deben ser construidas de forma estrecha con dos diámetros diferentes.

Después de determinar el modelo del sistema adecuado y el equilibrio de las fuerzas actuantes, el dominio en las diferentes zonas de validez puede ser descrito similarmente a la bien conocida ecuación de Poiseuille. La forma final de las ecuaciones de movimiento, y sus factores numéricos pueden ser deducidos de esta forma.

Se conoce que el orden de las relaciones entre la velocidad y el gradiente hidráulico difiere en las diferentes zonas de validez de la infiltración. El coeficiente de permeabilidad de Darcy, tiene que ser complementado por un factor que caracteriza el estado de flujo e incluye todos los efectos que difieren de la infiltración laminar.

## **CAPÍTULO 3**

# **CÁLCULO DEL CAUDAL DE INFILTRACIÓN**

## **3. CÁLCULO DEL CAUDAL DE INFILTRACIÓN**

### **3.1. Introducción**

Para realizar un correcto análisis de infiltración en el sistema Hidrográfico La Camarona – Balsas, es preciso realizar una descripción visual del proyecto, donde se especifiquen los puntos donde se realizarán los ensayos in-situ de carga constante y de carga variable.

A partir de estos ensayos se obtendrán valores reales del coeficiente de permeabilidad, los cuales serán utilizados para el cálculo del caudal de infiltración.

Además, es necesario describir la ubicación del nivel freático en el sitio, ya que su ubicación estará directamente relacionada con el caudal de infiltración.

### **3.2. Descripción visual del proyecto**

La ubicación donde se producirá la descarga del caudal adicional que recibirá el cauce natural del río La Camarona está descrita por la figura 3.1, donde se puede observar que existe excesiva vegetación en el cauce, tanto en su margen izquierda como en su margen derecha. A este lugar se le denominará la Abscisa 0+000.00 ubicado a una cota de 215 m y será el primer punto donde se ejecute la prueba de campo.



**Figura 3.1.** Cauce natural del río La Camarona abscisa 0+000.00 (entrega de tubería de conducción).



**Figura 3.2.** Cauce natural del río La Camarona abscisa 0+000.00 lado izquierdo aguas abajo (entrega de tubería de conducción).



**Figura 3.3.** Cauce natural del río La Camarona abscisa 0+000.00 lado derecho aguas abajo (entrega de tubería de conducción).

A partir de lo que se denominará la abscisa 1+000.00 la vegetación en la solera del cauce natural se muestra en menor proporción, sin embargo en las paredes del canal sigue siendo abundante. Está ubicada a una cota de 194m.

El material del cauce principalmente se encuentra conformado por arcillas muy plásticas, lo que permite deducir que probablemente existirá poca infiltración en este sitio, sin embargo este será el segundo punto donde se realizará el ensayo in-situ (Figura 3.4).



**Figura 3.4.** Cauce natural del río La Camarona abscisa 1+000.00 aguas abajo.

En la abscisa 4+100.00 ubicada a una cota aproximada de 176m se observa agua almacenada en el cauce natural del río La Camarona, lo que sin duda alguna denota que el cauce efectivamente está conformado por un material impermeable como la arcilla, motivo por el cual se encuentran lugares donde se estanca el agua. Tal como se observa en la figura 3.5.



**Figura 3.5.** Cauce natural del río La Camarona abscisa 4+100.00 aguas arriba. Cota aproximada 176m.

A partir de la abscisa 9+600.00 ubicada a una cota aproximada de 140m, se puede observar claramente cómo la geomorfología del río va cambiando, pasa de presentar material arcilloso a lo largo de su cauce a presentar gravas y arena. Adicionalmente se observa el afloramiento del nivel freático. Las Figuras 3.6, 3.7 y 3.8 muestran lo anteriormente mencionado claramente:



**Figura 3.6.** Cauce natural del río La Camarona abscisa 9+600.00 aguas arriba.



**Figura 3.7.** Cauce natural del río La Camarona abscisa 9+600.00 aguas abajo. Se produce un cambio en la geomorfología del río.



**Figura 3.8.** Cauce natural del río La Camarona abscisa 9+600.00 aguas abajo. Aparición del nivel freático. Cota aproximada 140m

Llegando a la Comuna de Iceras, cerca de la abscisa 10+500.00 con una cota aproximada del nivel freático de 135m se puede observar un gran afloramiento de agua, el cual es utilizado para satisfacer las necesidades de los comuneros del sector. Incluso se puede observar la construcción de un pozo de agua. (Figuras 3.9, 3.10, 3.11)

Próximo a este punto el río La Camarona contribuye con su caudal para formar el río Las Balsas.



**Figura 3.9.** Cauce natural del río Las Balsas aguas arriba, abscisa 10+500.00 en comuna Iceras. Cota aproximada del nivel freático 135m



**Figura 3.10.** Cauce natural del río Las Balsas aguas abajo, abscisa 10+500.00 en comuna Iceras.



**Figura 3.11.** Construcción de pozo, abscisa 10+500.00 en comuna Iceras.

En la abscisa 17+000.00 la cota aproximada del nivel freático es 89 m, se puede observar que pese a que la época invernal ha culminado aún existe agua en el cauce del río Balsas, como se muestra en la Figura 3.12, tanto aguas arriba como aguas abajo. Esto probablemente sea el indicativo de la existencia de un acuífero y por ende de la existencia de una capa impermeable a cierta profundidad. Se menciona esto porque el material que compone el cauce presenta un alto coeficiente de permeabilidad por tratarse de gravillas.



**Figura 3.12.** Cauce natural del río Las Balsas aguas arriba, abscisa 17+500.00. Cota aproximada del nivel freático 89m.

En la abscisa 22+000.00 pasando la comuna de Balsas y a una cota aproximada del nivel freático de 70m, se puede observar también la existencia de agua en el cauce del río.

En época invernal los comuneros deben cruzar el río con una tarabita, indicativo de que el caudal es de gran magnitud, además como se observa en la figura 3.14 las paredes del cauce son de gran altura, indicativas también de un gran tirante.



**Figura 3.13.** Cauce natural del río Las Balsas aguas arriba, abscisa 22+000.00. Cota aproximada del nivel freático 70m.



**Figura 3.14.** Cauce natural del río Las Balsas aguas abajo, abscisa 22+000.00. Uso de tarabita para cruzar el río en épocas invernales.

Los comuneros que habitan en el sector mencionan que el río permanece así durante todo el año, y que se ve provisto de agua debido a que en los cerros del sector existen grandes lagunas que alimentan el acuífero constantemente.

### **3.3. Procedimiento de las pruebas de campo**

Debido a la dificultad de acceso a ciertas zonas del sistema hidrológico, “La Camarona – Balsas”, las pruebas se han realizado en los lugares de más fácil acceso y más representativos en cuanto a las características geológicas, hidráulicas y físicas que representa el sistema.

Una vez identificados los puntos de mayor relevancia se procedió a ejecutar las pruebas in situ, que consistió básicamente en:

- Excavar dos pozos hasta identificar un estrato impermeable.
- La separación entre el pozo 1 y el pozo 2 fue de un metro.
- Tomar muestras de los estratos que se presentes en la excavación.
- La profundidad del segundo pozo debe ser mayor a la del primero, dependiendo de los estratos encontrados.
- El segundo pozo se ubicó siempre en dirección aguas abajo del primero.
- Llenar el primer pozo con gasto constante o gasto variable, dependiendo del tipo de estratos encontrados.
- La numeración de los estratos se realizó de abajo hacia arriba.
- Para determinar el caudal de infiltración en el sitio, fue necesario calcular el volumen infiltrado en un tiempo “t”.

### **3.4. Granulometrías ensayadas**

Para poder determinar la permeabilidad promedio existente en los pozos, es necesario realizar ensayos de granulometrías, esto permitirá identificar qué tipo de permeabilidad es más relevante, si la paralela o la perpendicular a los

estratos e incluso permite obtener la permeabilidad resultante de ambas en caso de que ambas sean significativas.

Hallando el diámetro efectivo de cada estrato según su granulometría y definiendo el tipo de suelo encontrado se puede posteriormente hallar el coeficiente de permeabilidad.

Los resultados obtenidos de estas granulometrías son los siguientes:

**Tabla 3.1.-** Valores del diámetro efectivo, coeficiente de uniformidad y grado de curvatura.

Abscisa	Estratos	Espesor capa (cms)	$D_{10}$ (mm)	Cu	Cc
0+000	1era capa	0.30	0.34	29.83	1.58
	2da capa	0.35	1.39	7.83	1.71
	3era capa	0.40	0.13	11.46	0.59
1+000	1era capa	0.31	1.33	2.07	4.13
	2da capa	0.40	1.07	5.10	1.92
	3era capa	0.30	0.22	23.95	0.68
4+100	1era capa	0.63	1.10	4.84	1.51
	2da capa	0.40	2.50	4.32	0.97
	3era capa	0.21	0.20	24.96	3.29
9+600	1era capa	0.30	0.11	3.35	1.01
	2da capa	0.20	1.31	7.08	2.13
	3era capa	0.20	1.64	3.26	1.35
	4ta capa	0.30	0.09	27.03	0.10
	5ta capa	0.10	0.15	23.24	0.76

Como se puede observar, los diámetros efectivos mayores se encuentran principalmente en las capas medias, lo que seguramente denota que en caso de ocurrir la infiltración, es posible que la conducción del flujo se genere a través de los estratos medios, sin embargo, para afirmar esto, se debe calcular el coeficiente de permeabilidad de cada estrato.

### 3.5. Coeficiente de permeabilidad in situ

Generalmente el suelo no se encuentra en un estado homogéneo, sino más bien se presenta en diversos estratos, entonces la identificación de cada estrato en los pozos realizados es de suma importancia para definir el coeficiente de permeabilidad que presentará cada uno.

El coeficiente de permeabilidad o conductividad hidráulica para cada estrato se lo puede calcular de cualquiera de las formas que se expusieron en el capítulo 2. Sin embargo, en el presente trabajo el cálculo de este coeficiente se lo realizará con la fórmula propuesta por Allen Hazen (Capítulo 2 inciso 2.1.6)

$$K = c * (d_{10})^2$$

Si bien es cierto que no es el único método para hallar el coeficiente de permeabilidad, se lo empleará ya que los datos que exige son valores que se obtienen directamente del campo. Una vez calculado el valor del diámetro efectivo para cada estrato, entonces se tiene como resultado:

**Tabla 3.2.-** Valores de la conductividad hidráulica en cada estrato (m/s).

Abscisa	Estrato	m/s
<b>0+000</b>	1era capa	1.34E-03
	2da capa	2.24E-02
	3era capa	1.96E-04
<b>1+000</b>	1era capa	2.05E-02
	2da capa	1.33E-02
	3era capa	5.61E-04
<b>4+100</b>	1era capa	1.40E-02
	2da capa	7.25E-02
	3era capa	4.64E-04
<b>9+600</b>	1era capa	1.40E-04
	2da capa	1.99E-02
	3era capa	3.12E-02
	4ta capa	9.40E-05
	5ta capa	2.61E-04

Como se había mencionado anteriormente en el inciso 3.4, los mayores coeficientes de permeabilidad efectivamente se presentan en las capas medias de los pozos realizados.

Un análisis más detallado de la determinación de estos valores, se lo puede observar en el Anexo: “Coeficientes de permeabilidad”.

### 3.6. Permeabilidad en terrenos estratificados

Como se mencionó en el Capítulo 2 inciso 2.1.5, cuando se presentan diferentes estratos se puede obtener un valor promedio del coeficiente de permeabilidad a través de dos fórmulas, las cuáles necesitan como datos el coeficiente de conductividad hidráulica de cada estrato y la altura de los mismos.

Utilizando las fórmulas del capítulo 2 inciso 2.1.5, se tiene como resultados de las permeabilidades horizontales:

**Tabla 3.3.-** Valores del coeficiente de permeabilidad horizontal promedio.

Abscisa	Estrato	Espesor de capa (m)	KMH (m/seg)
<b>0+000</b>	1era capa	0.30	7.93E-03
	2da capa	0.35	
	3era capa	0.40	
<b>1+000</b>	1era capa	0.31	1.17E-02
	2da capa	0.40	
	3era capa	0.30	
<b>4+100</b>	1era capa	0.63	3.06E-02
	2da capa	0.40	
	3era capa	0.21	
<b>9+600</b>	1era capa	0.30	9.38E-03
	2da capa	0.20	
	3era capa	0.20	
	4ta capa	0.30	
	5ta capa	0.10	

Y para las permeabilidades verticales:

**Tabla 3.4.-** Valores del coeficiente de permeabilidad vertical promedio.

Abscisa	Estrato	Espesor de capa (m)	KMV (m/seg)
<b>0+000</b>	1era capa	0.30	4.61E-04
	2da capa	0.35	
	3era capa	0.40	
<b>1+000</b>	1era capa	0.31	1.74E-03
	2da capa	0.40	
	3era capa	0.30	
<b>4+100</b>	1era capa	0.63	2.47E-03
	2da capa	0.40	
	3era capa	0.21	
<b>9+600</b>	1era capa	0.30	1.92E-04
	2da capa	0.20	
	3era capa	0.20	
	4ta capa	0.30	
	5ta capa	0.10	

Como se puede observar, efectivamente los coeficientes de permeabilidades verticales resultan poco representativos. Y los datos más relevantes resultan del coeficiente de permeabilidad horizontal.

Relacionando los coeficientes de permeabilidad horizontal y vertical para determinar la importancia de cada uno, se tiene:

**Tabla 3.5.-** Relación entre los coeficientes de permeabilidad vertical y horizontal.

KMH (m/seg)	KMV (m/seg)	KMV/KMH
<b>7.93E-03</b>	4.61E-04	5.81%
<b>1.17E-02</b>	1.74E-03	14.86%
<b>3.06E-02</b>	2.47E-03	8.06%
<b>9.38E-03</b>	1.92E-04	2.05%

Sin embargo, si se considerara un promedio de ambos coeficientes se obtendría:

**Tabla 3.6.-** Valores del coeficiente de permeabilidad total promedio.

Abscisa	Estrato	Espesor de capa	KM (m/seg)
<b>0+000</b>	1era capa	0.30	1.83E-06
	2da capa	0.35	
	3era capa	0.40	
<b>1+000</b>	1era capa	0.31	1.02E-05
	2da capa	0.40	
	3era capa	0.30	
<b>4+100</b>	1era capa	0.63	3.77E-05
	2da capa	0.40	
	3era capa	0.21	
<b>9+600</b>	1era capa	0.30	9.00E-07
	2da capa	0.20	
	3era capa	0.20	
	4ta capa	0.30	
	5ta capa	0.10	

El coeficiente de permeabilidad vertical llega a representar hasta máximo el 14.86% del coeficiente de permeabilidad horizontal, lo que significa que considerarlo podría afectar tremendamente en el cálculo de pérdidas por infiltración ya que representaría un valor mucho menor al real, como se puede ver en la tabla del coeficiente de permeabilidad promedio. Entonces, lo aconsejable es no tomar en cuenta el coeficiente de permeabilidad vertical considerando entonces un flujo unidireccional (en sentido horizontal).

Para un análisis más detallado, observar el Anexo: “Coeficientes de permeabilidad”.

### 3.7. Mediciones en Campo

Previo a calcular el caudal de infiltración total, se deben tomar los datos resultantes de las pruebas de bombeo in situ, los cuales pueden ser con gasto constante o gasto variable tal como se ha descrito anteriormente.

A partir de estos datos se han graficado líneas de tendencia como se muestra a continuación:

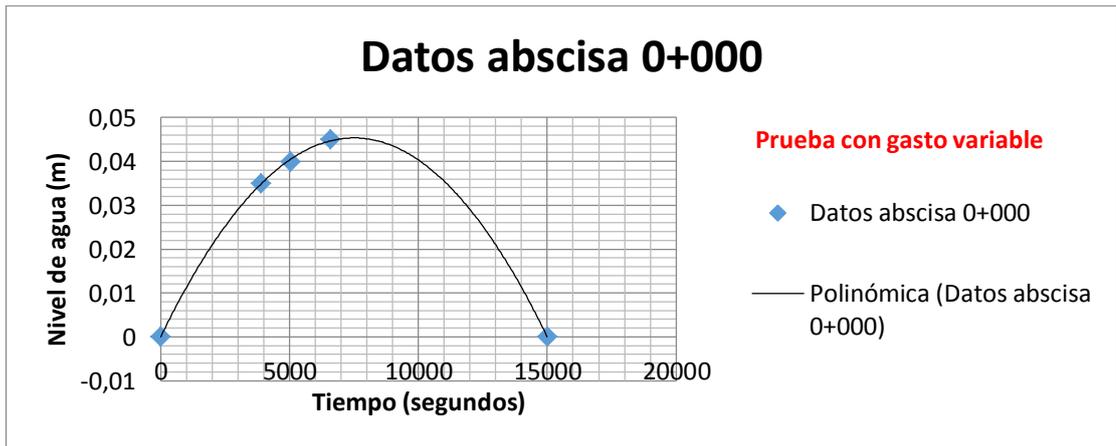


Figura 3.15. Prueba con gasto variable Abscisa 0+000

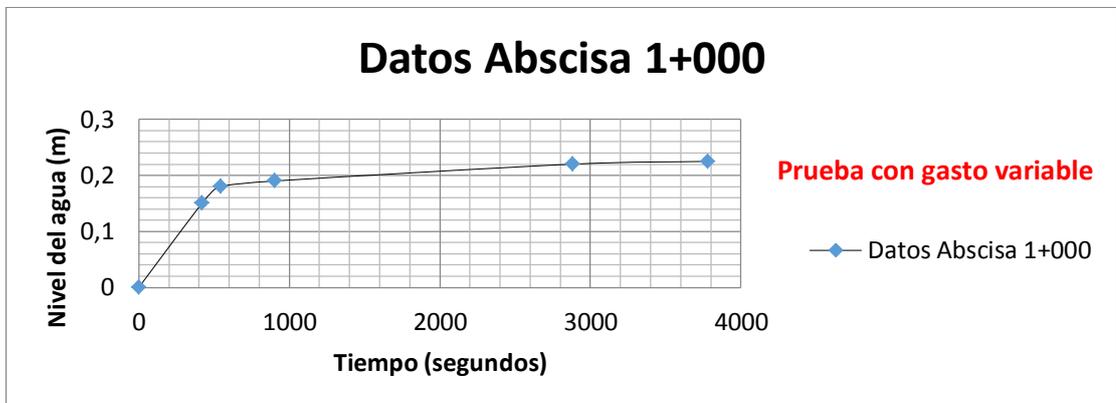
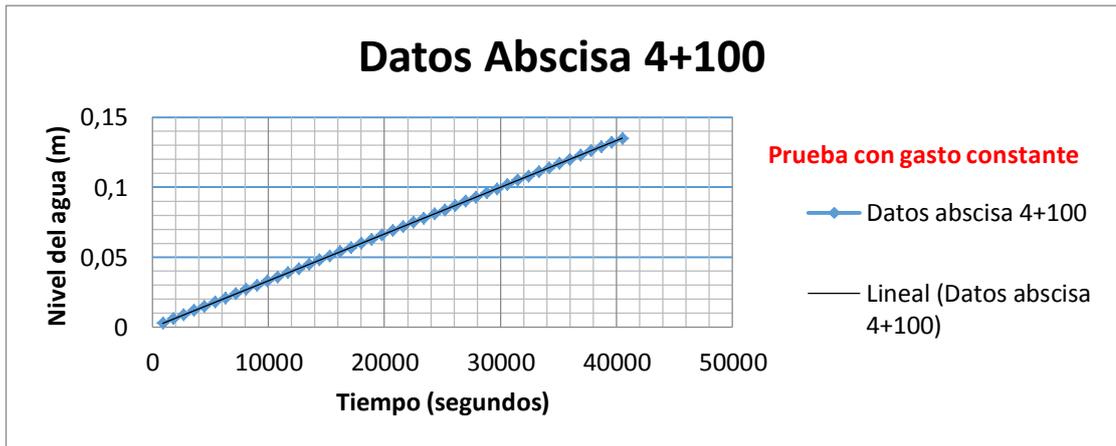
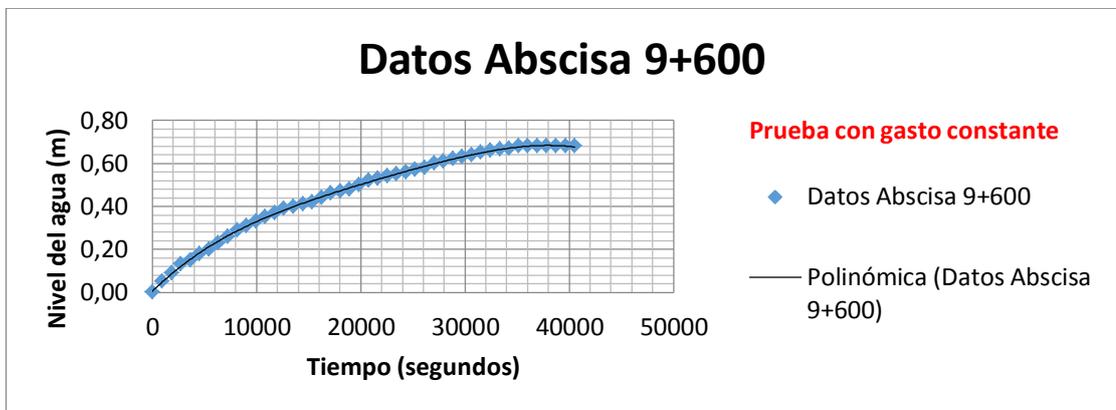


Figura 3.16. Prueba con gasto variable Abscisa 1+000



**Figura 3.17.** Prueba con gasto variable Abscisa 4+100



**Figura 3.18.** Prueba con gasto variable Abscisa 9+600

Las pruebas realizadas en las abscisas 0+000 y 1+000 se hicieron con gasto variable en el tiempo y las pruebas realizadas en las abscisas 4+100 y 9+600 se hicieron con gasto constante.

Estas consideraciones fueron realizadas tomando como base el principio de los permeámetros de carga variable y de carga constante, el primero utilizado preferentemente con suelos arcillosos y el segundo utilizado generalmente con suelos más granulares. Aunque ciertas literaturas mencionan que la mayor diferencia existente entre estos ensayos únicamente es que el tiempo requerido para utilizar carga constante en arcillas es mayor.

La decisión de realizar las pruebas con carga constante y carga variable se debe únicamente al tipo de material encontrado in situ.

Ver anexo: “Mediciones en campo”.

### **3.8. Cálculo del caudal de infiltración in situ**

#### **3.8.1. Introducción**

La determinación del caudal de infiltración se la podría resolver considerando cualquiera de los métodos descritos en el capítulo 2 inciso 2, sin embargo estos métodos presentan ciertas limitantes por ejemplo:

El método de Dupuit debe ser considerado únicamente cuando el flujo es permanente y unidireccional y si existe homogeneidad e isotropía del acuífero, acuitardo y del suelo superficial.

Los métodos propuestos por Bhagu Chahar, tanto para canales con fondo curvilíneo y canales prismáticos, presentan una solución que envuelve el hodógrafo inverso, la transformada de Schwarz – Christoffel y ecuaciones paramétricas.

El Dr. Kovács utiliza un modelo físico a partir de tuberías rectas en vez de considerar los poros del medio poroso y además utiliza el número de Reynolds para dividir los tipos de flujo que él considera posibles que se presenten.

Estos dos últimos autores, Bhagu Chahar y el Dr. Kovács, hacen referencia que pese a ser sus propuestas buenas aproximaciones a lo real, su nivel de complejidad es muy elevado, motivo por el cual no formarán parte de la resolución del presente Trabajo de Grado ya que su desarrollo y aplicación necesita de análisis matemáticos más profundos que escapan del alcance de este trabajo.

Considerando estas limitaciones aparentemente no habría solución alguna que satisfaga las necesidades del presente trabajo, sin embargo, los autores Schwab, Frevert, Edminster y Barnes mencionan en su aporte "Soil and Water Conservation Engineering" que:

Para flujo permanente, "La suposición del estado de un flujo horizontal, también denominado la teoría de Dupuit-Forchheimer, es que todas las líneas de corriente del sistema de flujo son horizontales, y la velocidad a lo largo de estas líneas de corriente es proporcional a la pendiente de la superficie de agua libre".

Para flujo no permanente mencionan: "Aunque el flujo no permanente es de un interés práctico alto, el problema del flujo es más difícil de resolver comparado con el flujo permanente. En regiones húmedas, las fuertes lluvias causan un aumento del nivel freático...". Una vez que se produzca una variación en la posición del nivel freático entonces se lo considera como un flujo no permanente.

Esto quiere decir que inicialmente, cuando se produzca la entrega del caudal de  $4.60 \text{ m}^3/\text{seg}$  al sistema hidrográfico La Camarona-Balsas, el caudal infiltrado se mostraría como no permanente, sin embargo, una vez que las partículas de suelo han llegado a su saturación, el flujo podría ser considerado como permanente y como se menciona en el inciso 3.6, debido a que se considera sólo el coeficiente de permeabilidad horizontal, el flujo deberá ser estimado como unidireccional.

Entonces, el método de Dupuit satisface y cumple con las necesidades requeridas para proceder a realizar el cálculo del caudal de infiltración.

Ver Anexo de Publicaciones.

### 3.8.2. Desarrollo

Según la descripción visual del proyecto presentada anteriormente, se puede determinar fácilmente los casos a utilizar en el momento de calcular el caudal de infiltración, siendo estos casos:

**Tabla 3.7.-** Identificación de los casos del método de Dupuit.

	0+000	1+000	4+100	9+600
<b>Caso 1</b>			X	X
<b>Caso 2</b>				
<b>Caso 3</b>	X	X		

Determinando las condiciones hidráulicas que se presentan en los lugares donde se realizaron las pruebas, se obtiene:

**Tabla 3.8.-** Condiciones hidráulicas de los lugares donde se realizaron las pruebas in situ luego de recibido el caudal de 4.60 m<sup>3</sup>/seg.

Abscisa	Q (m <sup>3</sup> /s)	Solera (m)	Pm (m)	S	n	Yn (m)	Yc (m)	Rh (m)	V (m/seg)
<b>0+000</b>	4.60	5.84	7.32	0.0211	0.03	0.33	0.38	0.29	2.14
<b>1+000</b>	4.60	5.20	6.78	0.0211	0.03	0.35	0.41	0.31	2.21
<b>4+100</b>	4.60	4.48	6.34	0.016	0.03	0.42	0.44	0.35	2.09
<b>9+600</b>	4.60	6.42	7.94	0.016	0.03	0.34	0.36	0.3	1.91

Se procede a calcular el caudal infiltrado según los casos presentados en el método de Dupuit.

Para el caso 3:

**Tabla 3.9.-** Caudal infiltrado considerando el caso 3 del Método de Dupuit.

Abscisas	Wp (m)	K (m/seg)	Hw(m)	Lf(m)	Hwe (m)	Qinf (m <sup>3</sup> /s/m)
<b>0+000</b>	7.32	1.96E-04	0.33	0.40	-0.35	3.87E-03
<b>1+000</b>	6.78	5.61E-04	0.35	0.30	-0.35	1.27E-02

Para el caso 1:

**Tabla 3.10.-** Caudal infiltrado considerando el caso 1 del Método de Dupuit.

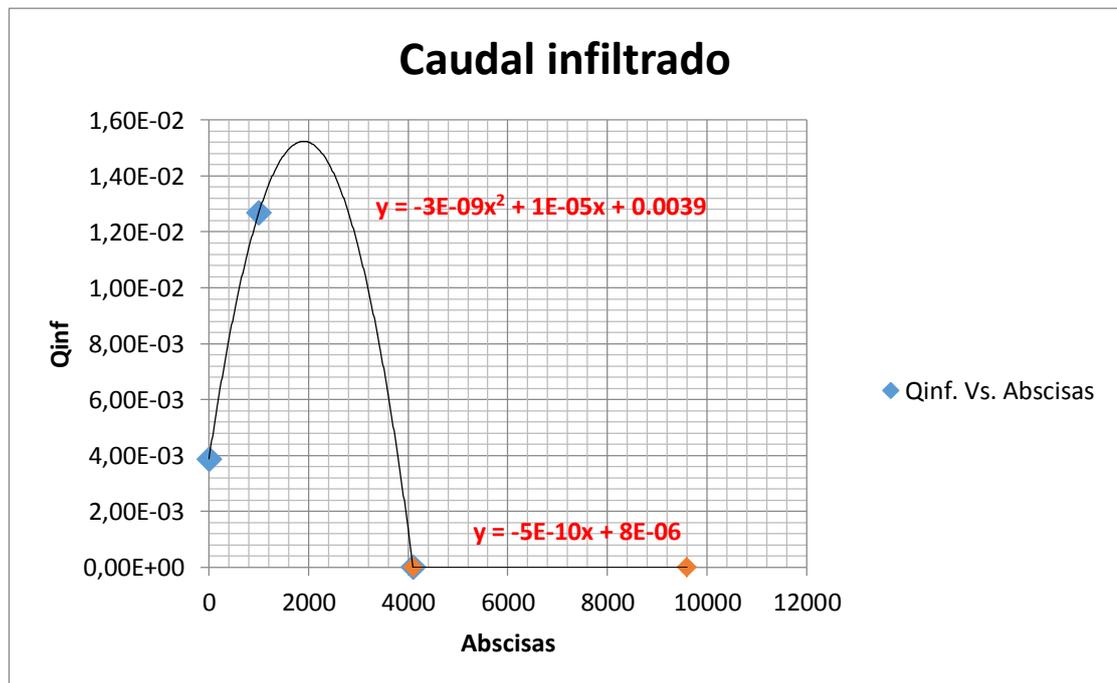
Abscisas	h1 (m)	h2 (m)	K (m/seg)	L (m)	Qinf (m3/s/m)
4+100	1.08	0.70	4.64E-04	58.40	5.37E-06
9+600	0.91	0.60	2.61E-04	52.00	2.35E-06

Resumiendo:

**Tabla 3.11.-** Caudal infiltrado en los lugares donde se realizaron las pruebas de campo.

Abscisas	Qinf (m3/s/m)
0+000	3.87E-03
1+000	1.27E-02
4+100	5.37E-06
9+600	2.35E-06

Según los resultados obtenidos y marcando líneas de tendencia con sus respectivas ecuaciones se obtiene:



**Figura 3.19.** Tendencia del caudal infiltrado en el río La Camarona.

Como se puede observar desde la abscisa 0+000 hasta la abscisa 4+100 existe un comportamiento prácticamente parabólico y desde la abscisa 4+100 a la 9+600 existe un comportamiento lineal.

El mayor caudal infiltrado se presenta en el tramo inicial del río y a medida que se avanza en recorrido, las infiltraciones producidas son mucho menores y prácticamente insignificantes.

**Tabla 3.12.-** Posibles pérdidas de infiltración producidas.

Abscisas	Qinf (m3/s)	Qacum (m3/s)
	0	4.600
<b>0+000</b>	3.87E-03	4.596
<b>1+000</b>	1.27E-02	4.583
<b>4+100</b>	5.37E-06	4.583
<b>9+600</b>	2.35E-06	4.583

Adicionalmente, en la descripción visual del proyecto también se puede observar que en el río Balsas existe un acuífero que aflora durante todo el año, que se presume que está influenciado por el nivel del embalse.

Por lo tanto, realizar estas pruebas en el río Balsas es imposible debido a la constante presencia del agua, sin embargo por la presencia del acuífero se puede estimar que las pérdidas que se producirían no serían de gran relevancia.

Es preciso mencionar, que el caudal que reciba el río Balsas llegará al Embalse San Vicente tanto superficial como sub-superficialmente.

# **CAPÍTULO 4**

## **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

## **4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.**

### **4.1. Conclusiones**

- Los resultados de las pérdidas por infiltración no resultan relevantes en el tramo del río La Camarona.
- Para el tramo del río Balsas no se ha realizado ningún ensayo porque se encuentra influido por un acuífero que tiene un nivel freático que se mantiene dentro del cauce del canal, y al parecer está influido a su vez por el Embalse de la Presa San Vicente. Por lo tanto se presume que las pérdidas de infiltración producidas en el río Balsas no son relevantes.
- Debido a la configuración granulométrica de los estratos, el caudal infiltrado en el río La Camarona será conducido principalmente de manera subsuperficial, es decir, a través del manto más permeable.
- De conformidad con lo expresado en los capítulos anteriores, al parecer, más que un problema de infiltración en el tramo del río La Camarona, se podría manifestar un proceso de erosión con el caudal permanente a entregar.
- Se puede apreciar que el tirante normal es menor que el tirante crítico y que el flujo tendrá números de Froude superiores a uno, en estas condiciones, el flujo es supercrítico y favorece más a la erosión.

### **4.2. Recomendaciones**

- Realizar una identificación minuciosa y profunda de los estratos presentados debajo del cauce del río La Camarona.

- Identificar la localización, tamaño y almacenaje del acuífero en el río Balsas.
- Realizar pruebas de permeabilidad en el laboratorio con los permeámetros de carga constante y variable. Estas pruebas no fueron realizadas debido a su elevado costo.
- Comparar los resultados obtenidos en el campo con los resultados obtenidos en el laboratorio.
- Realizar estudios de los posibles problemas erosivos que se podrían presentar en el sistema hidrográfico La Camarona – Balsas ya que el sistema siempre ha estado conformado por corrientes efímeras, mas no por un caudal constante de  $4.60 \text{ m}^3/\text{seg}$ .
- Debido a la presencia de un flujo supercrítico y a los posibles problemas erosivos que se pudiesen presentar, el autor recomienda que se analice la posibilidad de proteger con enrocado la sección hidráulica del río para evitar estos problemas de erosión.

# **CAPÍTULO 5**

## **BIBLIOGRAFÍA**

## 5. BIBLIOGRAFÍA.

- Juárez Badillo, Rico Rodríguez, *Fundamentos de la mecánica de suelos*, Editorial LIMUSA, México, 2005.
- Dr. G. Kovács, *Seepage through saturated and unsaturated layers*, Bulletin of the International Association of Scientific Hydrology, Budapest, Hungary, 1969.
- Leanne Morgan, Graham Green and Cameron Wood, *Simple analytic methods for estimating canal seepage in the upper south east of south Australia*, Department for Water, Australia, 2011.
- Bhagu R. Chahar, *Analytical solution to seepage problem from a soil channel with a curvilinear bottom*, Department of Civil Engineering, Indian Institute of Technology Delhi, New Delhi, India, 2005.
- Ing. Souto Gabriela, *Métodos para medir el coeficiente de permeabilidad*, Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional La Plata, Argentina, 2009.
- Ing. Bertoni Juan Carlos, Ing. Reyna Teresa María, Ing. Menajosky Sergio, Ing. Facundo Alonso, Ing. Pozzi Cecilia, *Cátedra de hidrología y procesos hidráulicos*, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 2006.
- Martín Vide Juan, *Ingeniería de ríos*, Editorial UPC, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España, 2009.
- Ochoa Rubio Tomás, *Hidráulica de ríos, procesos morfológicos*, Ecoe Ediciones, Bogotá, Colombia 2011.
- Rodríguez Díaz Alfonso, *Hidráulica Fluvial, fundamentos y aplicaciones, socavación*, Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería, Colombia, 2010.

- U.S. Bureau of Reclamation, *Design of Small Canal Structures*, Publ. Bureau of reclamation, Denver, Colorado, United States, 1983.
- Ven Te Chow, *Handbook of applied Hydrology*, Ed. Mc Graw Hill, New York, United States, 1964.
- Rolando Springall Galindo, *Hidrología superficial*, Editor UNAM, Facultad de Ingeniería, México, 1970.
- Schwab, Frevert, Edminster, Barnes, *Soil and water conservation engineering*, Ed. John Wiley & Sons, United States, 1993.
- Rocha Arturo, *Introducción a la Hidráulica fluvial*, Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ingeniería Civil, Lima, Perú, 1998.
- Ing. Matute Luis, *Infiltración en los ríos Camarona y Balsas*, ACOTECNIC, Ecuador, 2011.
- <http://www.agua.gob.ec/?s=trasvase+chong%C3%B3n+san+vicente>
- <http://www.fceia.unr.edu.ar/geologiaygeotecnia/Permeabilidad%20en%20Suelos.pdf>

# **CAPÍTULO 6**

## **ANEXOS**

# FOTOGRAFÍAS



**Imagen 1: Abscisa 0+000. Excavación de pozos.**



**Imagen 2: Abscisa 0+000. Ejecución de la prueba en campo con gasto variable.**



**Imagen 3: Abscisa 0+000. Aparición del gasto variable en el estrato permeable.**



**Imagen 4: Abscisa 0+000. Mediciones en campo.**



**Imagen 5: Abcisa 1+000. Excavación de los pozos.**



**Imagen 6: Abcisa 1+000. Visualización de los estratos del pozo 1.**



**Imagen 7: Abscisa 1+000. Visualización de los estratos del pozo 2.**



**Imagen 8: Abscisa 1+000. Aparición del gasto variable en el estrato permeable.**



**Imagen 9: Abscisa 4+100. Excavación de los pozos.**



**Imagen 10: Abscisa 4+100. Visualización de los estratos del pozo 1.**



**Imagen 11: Abscisa 0+000. Aparición del gasto constante en el estrato permeable.**



**Imagen 12: Abscisa 4+100. Mediciones en campo.**



**Imagen 13: Abscisa 9+600. Excavación de los pozos.**



**Imagen 14: Abscisa 9+600. Visualización de los estratos del pozo 2.**



Imagen 15: Abscisa 9+600. Mediciones en campo de la prueba con gasto constante.

# **GRANULOMETRÍAS**

## Laboratorio de suelos y materiales

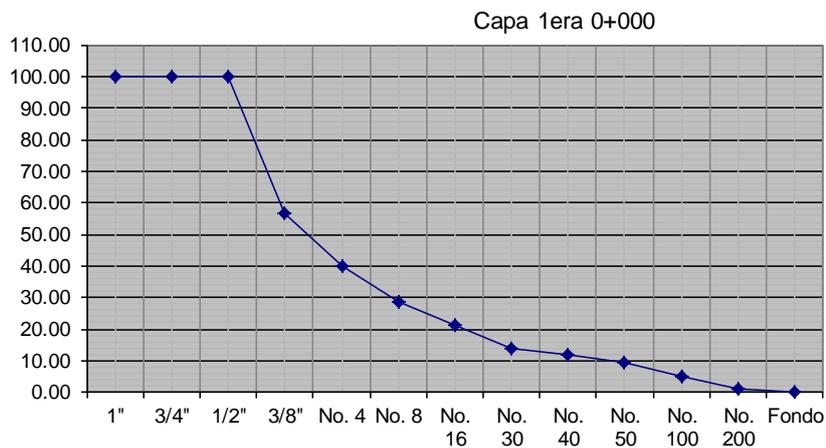
### Análisis Granulométrico

Especificación para agregado ASTM C-33  
Norma técnica Ecuatoriana INEN 872 Arena

<b>Obra:</b>	<b>Trabajo de tesis</b>
Material:	.....
Fuente del material;	Río La Camarona Abscisa 0+000
Fecha:	09-jun-13
Capa:	Primera

Peso de la muestra húmeda (a)	1350 gr
Peso de la muestra seca (b)	1308 gr

Tamiz		Peso Retenido Parcial	% Retenido	% Retenido Acumulado	% Pasa Acumulado	Especificación	
in	mm						
1"	25.400	0.0000	0.00	0.00	100.00		
3/4"	19.050	0.0000	0.00	0.00	100.00		
1/2"	12.700	0.0000	0.00	0.00	100.00		
3/8"	9.500	0.5250	43.07	43.07	56.93		
No. 4	4.750	0.2060	16.90	59.97	40.03		
No. 8	2.360	0.1380	11.32	71.29	28.71		
No. 16	1.180	0.0930	7.63	78.92	21.08		
No. 30	0.600	0.0870	7.14	86.05	13.95		
No. 40	0.425	0.0280	2.30	88.35	11.65		
No. 50	0.300	0.0300	2.46	90.81	9.19		
No. 100	0.150	0.0520	4.27	95.08	4.92		
No. 200	0.075	0.0490	4.02	99.10	0.90		
Fondo		0.0110	0.90	100.00	0.00		
Pasa 200		1.2190					



D60:	10.18 mm
D30:	2.34 mm
D10 (diámetro efectivo):	0.34 mm
Coefficiente de uniformidad (Cu):	29.83
Grado de curvatura (Cc):	1.58

## Laboratorio de suelos y materiales

### Análisis Granulométrico

Especificación para agregado ASTM C-33  
Norma técnica Ecuatoriana INEN 872 Arena

Obra: Trabajo de tesis

Material:

Fuente del material: Río La Camarona Abscisa 0+000

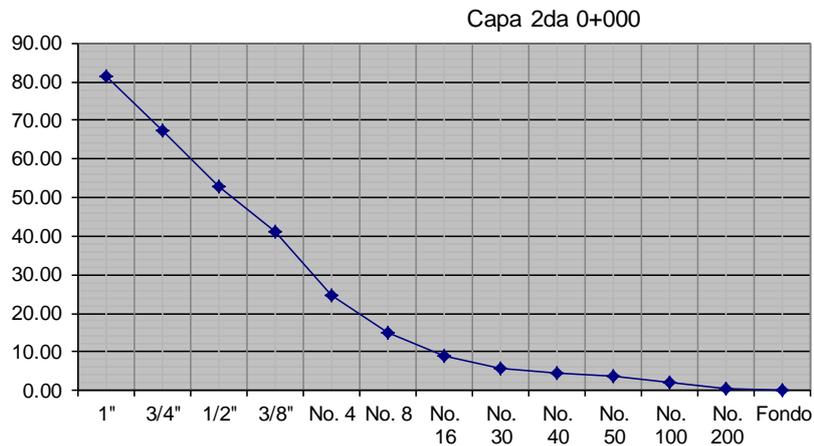
Fecha: 09-jun-13

Capa: Segunda

Peso de la muestra húmeda (a) 1294 gr

Peso de la muestra seca (b) 1105 gr

Tamiz		Peso Retenido Parcial	% Retenido	% Retenido Acumulado	% Pasa Acumulado	Especificación	
in	mm						
1"	25.400	0.2040	18.36	18.36	81.64		
3/4"	19.050	0.1590	14.31	32.67	67.33		
1/2"	12.700	0.1590	14.31	46.98	53.02		
3/8"	9.500	0.1300	11.70	58.69	41.31		
No. 4	4.750	0.1850	16.65	75.34	24.66		
No. 8	2.360	0.1100	9.90	85.24	14.76		
No. 16	1.180	0.0650	5.85	91.09	8.91		
No. 30	0.600	0.0360	3.24	94.33	5.67		
No. 40	0.425	0.0130	1.17	95.50	4.50		
No. 50	0.300	0.0100	0.90	96.40	3.60		
No. 100	0.150	0.0160	1.44	97.84	2.16		
No. 200	0.075	0.0200	1.80	99.64	0.36		
Fondo		0.0040	0.36	100.00	0.00		
Pasa 200		1.1110					



D60:	10.88 mm
D30:	5.09 mm
D10 (diámetro efectivo):	1.39 mm
Coefficiente de uniformidad (Cu):	7.83
Grado de curvatura (Cc):	1.71

## Laboratorio de suelos y materiales

### Análisis Granulométrico

Especificación para agregado ASTM C-33

Norma técnica Ecuatoriana INEN 872 Arena

**Obra:** Trabajo de tesis

Material:

Fuente del material;

Fecha:

Capa:

Río La Camarona Abscisa 0+000

09-jun-13

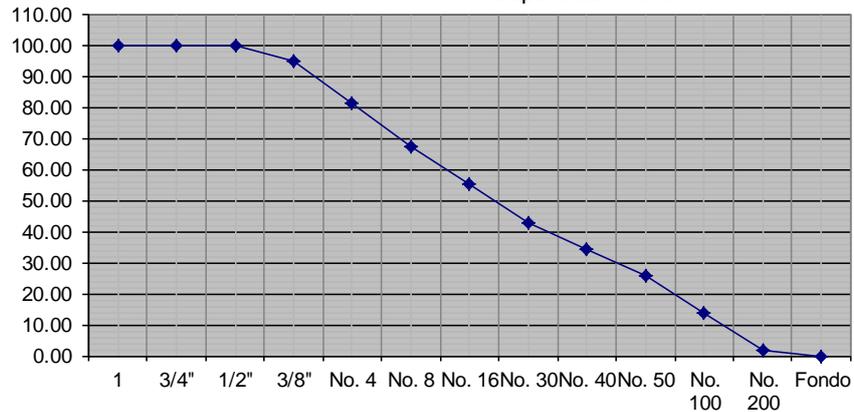
Tercera

Peso de la muestra húmeda (a) 1128 gr

Peso de la muestra seca (b) 1010 gr

Tamiz		Peso Retenido Parcial	% Retenido	% Retenido Acumulado	% Pasa Acumulado	Especificación	
in	mm						
1	25.400	0.00	0.00	0.00	100.00		
3/4"	19.050	0.00	0.00	0.00	100.00		
1/2"	12.700	0.00	0.00	0.00	100.00		
3/8"	9.500	0.0470	5.13	5.13	94.87		
No. 4	4.750	0.1240	13.52	18.65	81.35		
No. 8	2.360	0.1260	13.74	32.39	67.61		
No. 16	1.180	0.1130	12.32	44.71	55.29		
No. 30	0.600	0.1140	12.43	57.14	42.86		
No. 40	0.425	0.0780	8.51	65.65	34.35		
No. 50	0.300	0.0760	8.29	73.94	26.06		
No. 100	0.150	0.1120	12.21	86.15	13.85		
No. 200	0.075	0.1090	11.89	98.04	1.96		
Fondo		0.0180	1.96	100.00	0.00		
Pasa 200		0.9170					

Capa 3era 0+000



D <sub>60</sub> :	1.54 mm
D <sub>30</sub> :	0.35 mm
D <sub>10</sub> (diámetro efectivo):	0.13 mm
Coefficiente de uniformidad (Cu):	11.46
Grado de curvatura (Cc):	0.59

## Laboratorio de suelos y materiales

### Análisis Granulométrico

Especificación para agregado ASTM C-33  
Norma técnica Ecuatoriana INEN 872 Arena

**Obra:** Trabajo de tesis

Material:

Fuente del material;

Fecha:

Capa:

Río La Camarona Abscisa 1+000

09-jun-13

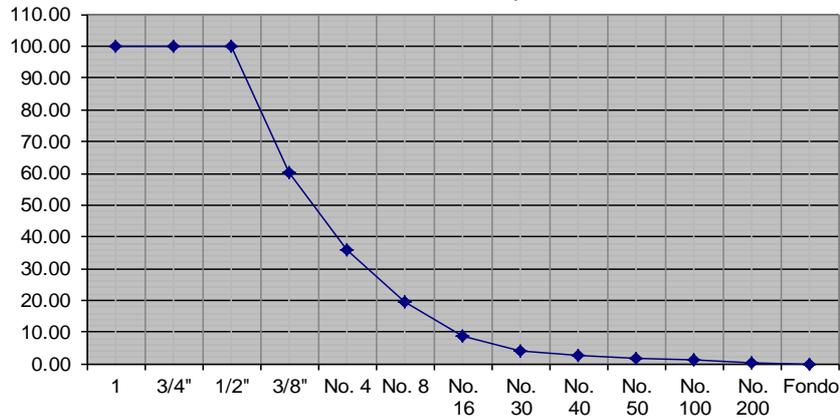
Primera

Peso de la muestra húmeda (a) 1144 gr

Peso de la muestra seca (b) 0.917 gr

Tamiz		Peso Retenido Parcial	% Retenido	% Retenido Acumulado	% Pasa Acumulado	Especificación	
in	mm						
1	25.400	0.00	0.00	0.00	100.00		
3/4"	19.050	0.00	0.00	0.00	100.00		
1/2"	12.700	0.00	0.00	0.00	100.00		
3/8"	9.500	0.3670	39.80	39.80	60.20		
No. 4	4.750	0.2220	24.08	63.88	36.12		
No. 8	2.360	0.1520	16.49	80.37	19.63		
No. 16	1.180	0.0990	10.74	91.11	8.89		
No. 30	0.600	0.0460	4.99	96.10	3.90		
No. 40	0.425	0.0120	1.30	97.40	2.60		
No. 50	0.300	0.0070	0.76	98.16	1.84		
No. 100	0.150	0.0070	0.76	98.92	1.08		
No. 200	0.075	0.0060	0.65	99.57	0.43		
Fondo		0.0040	0.43	100.00	0.00		
Pasa 200		0.9220					

Capa 1era 1+000



D60:	5.49 mm
D30:	3.89 mm
D10 (diámetro efectivo):	1.33 mm
Coefficiente de uniformidad (Cu):	4.13
Grado de curvatura (Cc):	2.07

## Laboratorio de suelos y materiales

### Análisis Granulométrico

Especificación para agregado ASTM C-33  
Norma técnica Ecuatoriana INEN 872 Arena

**Obra:** Trabajo de tesis

Material:

Fuente del material:

Fecha:

Capa:

Río La Camarona Abscisa 1+000

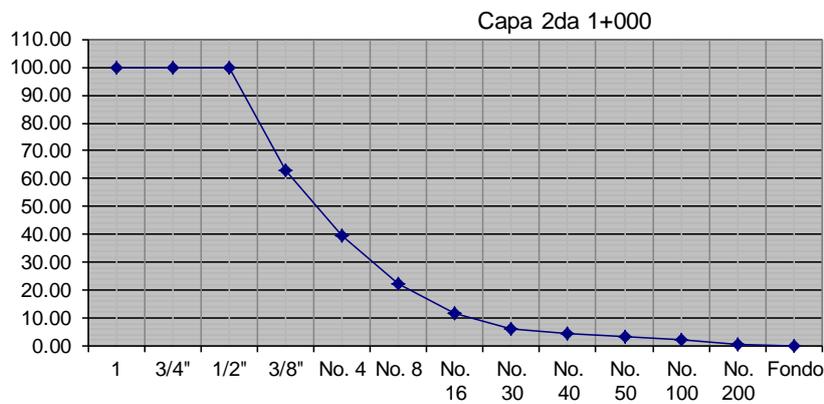
09-jun-13

Segunda

Peso de la muestra húmeda (a) 1033 gr

Peso de la muestra seca (b) 0.859 gr

Tamiz		Peso Retenido Parcial	% Retenido	% Retenido Acumulado	% Pasa Acumulado	Especificación
in	mm					
1	25.400	0.00	0.00	0.00	100.00	
3/4"	19.050	0.00	0.00	0.00	100.00	
1/2"	12.700	0.00	0.00	0.00	100.00	
3/8"	9.500	0.3200	37.12	37.12	62.88	
No. 4	4.750	0.2020	23.43	60.56	39.44	
No. 8	2.360	0.1470	17.05	77.61	22.39	
No. 16	1.180	0.0940	10.90	88.52	11.48	
No. 30	0.600	0.0440	5.10	93.62	6.38	
No. 40	0.425	0.0150	1.74	95.36	4.64	
No. 50	0.300	0.0100	1.16	96.52	3.48	
No. 100	0.150	0.0130	1.51	98.03	1.97	
No. 200	0.075	0.0110	1.28	99.30	0.70	
Fondo		0.0060	0.70	100.00	0.00	
Pasa 200		0.8620				



D60:	5.44 mm
D30:	3.34 mm
D10 (diámetro efectivo):	1.07 mm
Coefficiente de uniformidad (Cu):	5.10
Grado de curvatura (Cc):	1.92

## Laboratorio de suelos y materiales

### Análisis Granulométrico

Especificación para agregado ASTM C-33  
Norma técnica Ecuatoriana INEN 872 Arena

**Obra:** Trabajo de tesis

Material:

Fuente del material;

Río La Camarona Abscisa 1+000

Fecha:

09-jun-13

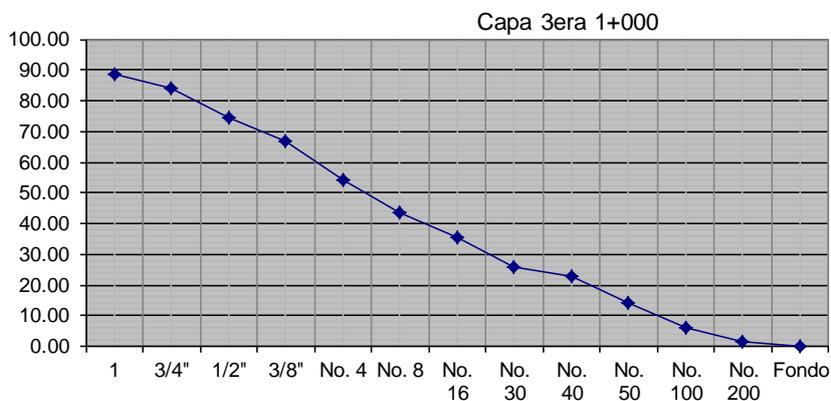
Capa:

Tercera

Peso de la muestra húmeda (a) 1219 gr

Peso de la muestra seca (b) 1097 gr

Tamiz		Peso Retenido Parcial	% Retenido	% Retenido Acumulado	% Pasa Acumulado	Especificación	
in	mm						
1	25.400	0.1200	11.07	11.07	88.93		
3/4"	19.050	0.0540	4.98	16.05	83.95		
1/2"	12.700	0.1010	9.32	25.37	74.63		
3/8"	9.500	0.0850	7.84	33.21	66.79		
No. 4	4.750	0.1360	12.55	45.76	54.24		
No. 8	2.360	0.1140	10.52	56.27	43.73		
No. 16	1.180	0.0880	8.12	64.39	35.61		
No. 30	0.600	0.1060	9.78	74.17	25.83		
No. 40	0.425	0.0310	2.86	77.03	22.97		
No. 50	0.300	0.0960	8.86	85.89	14.11		
No. 100	0.150	0.0870	8.03	93.91	6.09		
No. 200	0.075	0.0520	4.80	98.71	1.29		
Fondo		0.0140	1.29	100.00	0.00		
Pasa 200		1.0840					



D60:	5.16 mm
D30:	0.87 mm
D10 (diámetro efectivo):	0.22 mm
Coefficiente de uniformidad (Cu):	23.95
Grado de curvatura (Cc):	0.68

## Laboratorio de suelos y materiales

### Análisis Granulométrico

Especificación para agregado ASTM C-33  
Norma técnica Ecuatoriana INEN 872 Arena

**Obra:** Trabajo de tesis

Material:

Fuente del material;

Río La Camarona Abscisa 4+100

Fecha:

09-jun-13

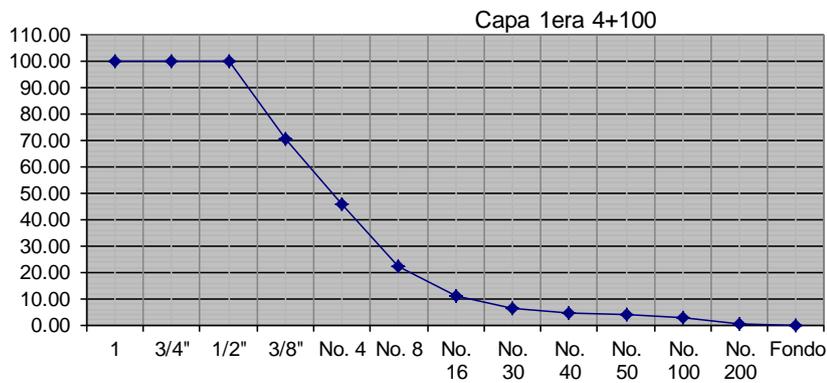
Capa:

Primera

Peso de la muestra húmeda (a) 1102 gr

Peso de la muestra seca (b) 0.826 gr

Tamiz		Peso Retenido Parcial	% Retenido	% Retenido Acumulado	% Pasa Acumulado	Especificación	
in	mm						
1	25.400	0.00	0.00	0.00	100.00		
3/4"	19.050	0.00	0.00	0.00	100.00		
1/2"	12.700	0.00	0.00	0.00	100.00		
3/8"	9.500	0.2430	29.21	29.21	70.79		
No. 4	4.750	0.2080	25.00	54.21	45.79		
No. 8	2.360	0.1950	23.44	77.64	22.36		
No. 16	1.180	0.0940	11.30	88.94	11.06		
No. 30	0.600	0.0390	4.69	93.63	6.37		
No. 40	0.425	0.0120	1.44	95.07	4.93		
No. 50	0.300	0.0070	0.84	95.91	4.09		
No. 100	0.150	0.0100	1.20	97.12	2.88		
No. 200	0.075	0.0180	2.16	99.28	0.72		
Fondo		0.0060	0.72	100.00	0.00		
Pasa 200		0.8320					



D60:	5.34 mm
D30:	2.98 mm
D10 (diámetro efectivo):	1.10 mm
Coefficiente de uniformidad (Cu):	4.84
Grado de curvatura (Cc):	1.51

## Laboratorio de suelos y materiales

### Análisis Granulométrico

Especificación para agregado ASTM C-33  
Norma técnica Ecuatoriana INEN 872 Arena

**Obra:** Trabajo de tesis

Material:

Fuente del material;

Fecha:

Capa:

Río La Camarona Abscisa 4+100

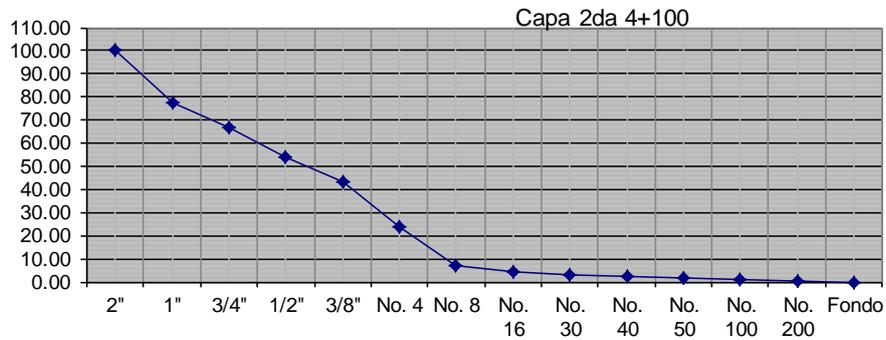
09-jun-13

Segunda

Peso de la muestra húmeda (a) 1630 gr

Peso de la muestra seca (b) 1420 gr

Tamiz		Peso Retenido Parcial	% Retenido	% Retenido Acumulado	% Pasa Acumulado	Especificación	
in	mm						
2"	50.800	0.0000	0.0000	0.0000	100.00		
1"	25.400	0.3280	22.78	22.78	77.22		
3/4"	19.050	0.1490	10.35	33.13	66.88		
1/2"	12.700	0.1840	12.78	45.90	54.10		
3/8"	9.500	0.1570	10.90	56.81	43.19		
No. 4	4.750	0.2820	19.58	76.39	23.61		
No. 8	2.360	0.2350	16.32	92.71	7.29		
No. 16	1.180	0.0390	2.71	95.42	4.58		
No. 30	0.600	0.0240	1.67	97.08	2.92		
No. 40	0.425	0.0090	0.63	97.71	2.29		
No. 50	0.300	0.0070	0.49	98.19	1.81		
No. 100	0.150	0.0100	0.69	98.89	1.11		
No. 200	0.075	0.0130	0.90	99.79	0.21		
Fondo		0.0030	0.21	100.00	0.00		
Pasa 200		1.4400					



D60:	10.79 mm
D30:	5.11 mm
D10 (diámetro efectivo):	2.50 mm
Coefficiente de uniformidad (Cu):	4.32
Grado de curvatura (Cc):	0.97

## Laboratorio de suelos y materiales

### Análisis Granulométrico

Especificación para agregado ASTM C-33  
Norma técnica Ecuatoriana INEN 872 Arena

Obra: **Trabajo de tesis**

Material:

Fuente del material:

Fecha:

Capa:

Río La Camarona Abscisa 4+100

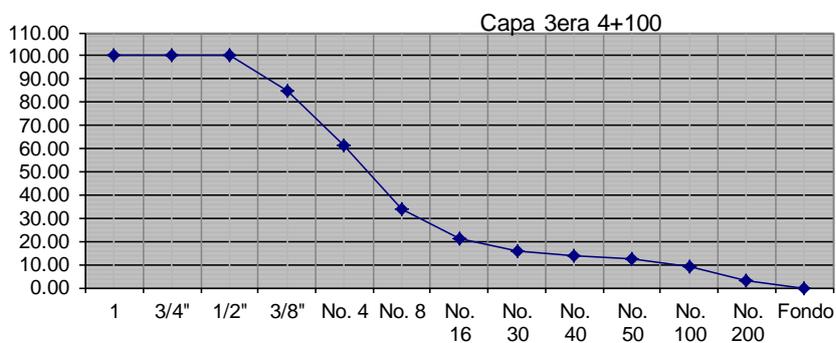
09-jun-13

Tercera

Peso de la muestra húmeda (a) 1140 gr

Peso de la muestra seca (b) 1019 gr

Tamiz		Peso Retenido Parcial	% Retenido	% Retenido Acumulado	% Pasa Acumulado	Especificación
in	mm					
1	25.400	0.00	0.00	0.00	100.00	
3/4"	19.050	0.00	0.00	0.00	100.00	
1/2"	12.700	0.00	0.00	0.00	100.00	
3/8"	9.500	0.1310	15.29	15.29	84.71	
No. 4	4.750	0.2020	23.57	38.86	61.14	
No. 8	2.360	0.2330	27.19	66.04	33.96	
No. 16	1.180	0.1110	12.95	79.00	21.00	
No. 30	0.600	0.0450	5.25	84.25	15.75	
No. 40	0.425	0.0160	1.87	86.11	13.89	
No. 50	0.300	0.0130	1.52	87.63	12.37	
No. 100	0.150	0.0260	3.03	90.67	9.33	
No. 200	0.075	0.0560	6.53	97.20	2.80	
Fondo		0.0240	2.80	100.00	0.00	
Pasa 200		0.8570				



D60:	4.87 mm
D30:	1.77 mm
D10 (diámetro efectivo):	0.20 mm
Coefficiente de uniformidad (Cu):	24.96
Grado de curvatura (Cc):	3.29

## Laboratorio de suelos y materiales

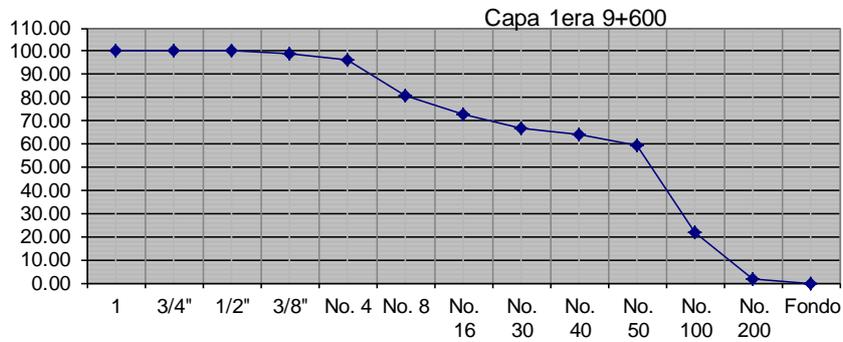
### Análisis Granulométrico

Especificación para agregado ASTM C-33  
Norma técnica Ecuatoriana INEN 872 Arena

Obra: **Trabajo de tesis**  
Material: \_\_\_\_\_  
Fuente del material: Río La Camarona Abcisa 9+600  
Fecha: 09-jun-13  
Capa: Primera

Peso de la muestra húmeda (a) 0.443 gr  
Peso de la muestra seca (b) 0.346 gr

Tamiz		Peso Retenido Parcial	% Retenido	% Retenido Acumulado	% Pasa Acumulado	Especificación	
in	mm						
1	25.400	0.00	0.00	0.00	100.00		
3/4"	19.050	0.00	0.00	0.00	100.00		
1/2"	12.700	0.00	0.00	0.00	100.00		
3/8"	9.500	0.0040	1.15	1.15	98.85		
No. 4	4.750	0.0100	2.87	4.01	95.99		
No. 8	2.360	0.0520	14.90	18.91	81.09		
No. 16	1.180	0.0300	8.60	27.51	72.49		
No. 30	0.600	0.0190	5.44	32.95	67.05		
No. 40	0.425	0.0100	2.87	35.82	64.18		
No. 50	0.300	0.0160	4.58	40.40	59.60		
No. 100	0.150	0.1320	37.82	78.22	21.78		
No. 200	0.075	0.0690	19.77	97.99	2.01		
Fondo		0.0070	2.01	100.00	0.00		
Pasa 200		0.3490					



D <sub>60</sub> :	0.38 mm
D <sub>30</sub> :	0.21 mm
D <sub>10</sub> (diámetro efectivo):	0.11 mm
Coefficiente de uniformidad (Cu):	3.35
Grado de curvatura (Cc):	1.01

## Laboratorio de suelos y materiales

### Análisis Granulométrico

Especificación para agregado ASTM C-33  
Norma técnica Ecuatoriana INEN 872 Arena

**Obra:**

**Trabajo de tesis**

Material:

Fuente del material;

Fecha:

Capa:

Río La Camarona Abscisa 9+600

09-jun-13

Segunda

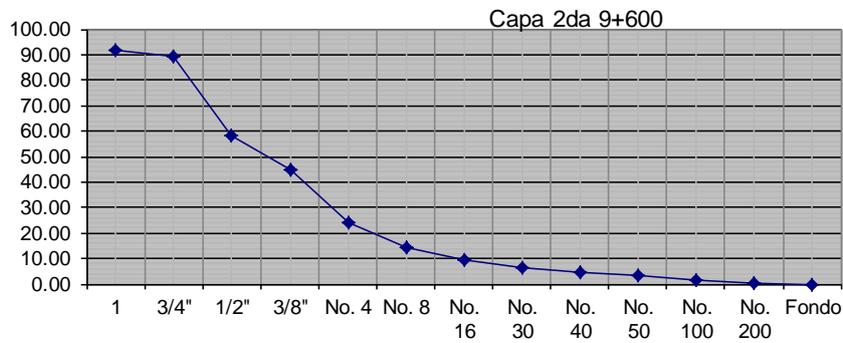
Peso de la muestra húmeda (a)

0.442 gr

Peso de la muestra seca (b)

0.364 gr

Tamiz		Peso Retenido Parcial	% Retenido	% Retenido Acumulado	% Pasa Acumulado	Especificación	
in	mm						
1	25.400	0.0290	7.95	7.95	92.05		
3/4"	19.050	0.0110	3.01	10.96	89.04		
1/2"	12.700	0.1130	30.96	41.92	58.08		
3/8"	9.500	0.0490	13.42	55.34	44.66		
No. 4	4.750	0.0740	20.27	75.62	24.38		
No. 8	2.360	0.0360	9.86	85.48	14.52		
No. 16	1.180	0.0180	4.93	90.41	9.59		
No. 30	0.600	0.0120	3.29	93.70	6.30		
No. 40	0.425	0.0060	1.64	95.34	4.66		
No. 50	0.300	0.0050	1.37	96.71	3.29		
No. 100	0.150	0.0060	1.64	98.36	1.64		
No. 200	0.075	0.0050	1.37	99.73	0.27		
Fondo		0.0010	0.27	100.00	0.00		
Pasa 200		0.3650					



D <sub>60</sub> :	9.29 mm
D <sub>30</sub> :	5.10 mm
D <sub>10</sub> (diámetro efectivo):	1.31 mm
Coefficiente de uniformidad (Cu):	7.08
Grado de curvatura (Cc):	2.13

## Laboratorio de suelos y materiales

### Análisis Granulométrico

Especificación para agregado ASTM C-33  
Norma técnica Ecuatoriana INEN 872 Arena

**Obra:** Trabajo de tesis

Material:

Fuente del material;

Río La Camarona Abscisa 9+600

Fecha:

09-jun-13

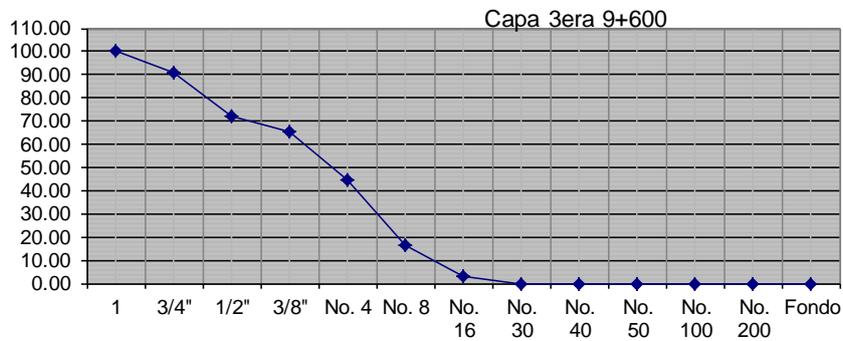
Capa:

Tercera

Peso de la muestra húmeda (a) 0.424 gr

Peso de la muestra seca (b) 0.385 gr

Tamiz		Peso Retenido Parcial	% Retenido	% Retenido Acumulado	% Pasa Acumulado	Especificación	
in	mm						
1	25.400	0.0000	0.00	0.00	100.00		
3/4"	19.050	0.0340	9.04	9.04	90.96		
1/2"	12.700	0.0720	19.15	28.19	71.81		
3/8"	9.500	0.0230	6.12	34.31	65.69		
No. 4	4.750	0.0790	21.01	55.32	44.68		
No. 8	2.360	0.1070	28.46	83.78	16.22		
No. 16	1.180	0.0490	13.03	96.81	3.19		
No. 30	0.600	0.0120	3.19	100.00	0.00		
No. 40	0.425	0.0000	0.00	100.00	0.00		
No. 50	0.300	0.0000	0.00	100.00	0.00		
No. 100	0.150	0.0000	0.00	100.00	0.00		
No. 200	0.075	0.0000	0.00	100.00	0.00		
Fondo		0.0000	0.00	100.00	0.00		
Pasa 200		0.3760					



D <sub>60</sub> :	5.36 mm
D <sub>30</sub> :	3.45 mm
D <sub>10</sub> (diámetro efectivo):	1.64 mm
Coefficiente de uniformidad (Cu):	3.26
Grado de curvatura (Cc):	1.35

## Laboratorio de suelos y materiales

### Análisis Granulométrico

Especificación para agregado ASTM C-33

Norma técnica Ecuatoriana INEN 872 Arena

Obra: **Trabajo de tesis**

Material:

Fuente del material;

Fecha:

Capa:

Río La Camarona Abscisa 9+600

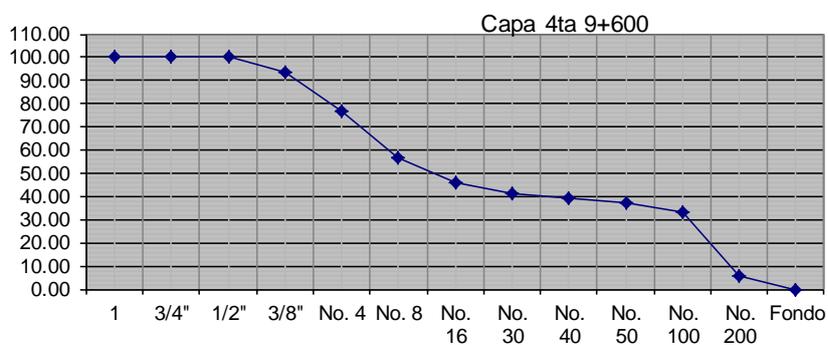
09-jun-13

Cuarta

Peso de la muestra húmeda (a) 0.406 gr

Peso de la muestra seca (b) 0.306 gr

Tamiz		Peso Retenido Parcial	% Retenido	% Retenido Acumulado	% Pasa Acumulado	Especificación	
in	mm						
1	25.400	0.00	0.00	0.00	100.00		
3/4"	19.050	0.00	0.00	0.00	100.00		
1/2"	12.700	0.00	0.00	0.00	100.00		
3/8"	9.500	0.0190	6.19	6.19	93.81		
No. 4	4.750	0.0520	16.94	23.13	76.87		
No. 8	2.360	0.0620	20.20	43.32	56.68		
No. 16	1.180	0.0320	10.42	53.75	46.25		
No. 30	0.600	0.0160	5.21	58.96	41.04		
No. 40	0.425	0.0060	1.95	60.91	39.09		
No. 50	0.300	0.0050	1.63	62.54	37.46		
No. 100	0.150	0.0140	4.56	67.10	32.90		
No. 200	0.075	0.0830	27.04	94.14	5.86		
Fondo		0.0180	5.86	100.00	0.00		
Pasa 200		0.3070					



D60:	2.49 mm
D30:	0.15 mm
D10 (diámetro efectivo):	0.09 mm
Coefficiente de uniformidad (Cu):	27.03
Grado de curvatura (Cc):	0.10

## Laboratorio de suelos y materiales

### Análisis Granulométrico

Especificación para agregado ASTM C-33  
Norma técnica Ecuatoriana INEN 872 Arena

**Obra:** Trabajo de tesis

Material:

Fuente del material;

Río La Camarona Abscisa 9+600

Fecha:

09-jun-13

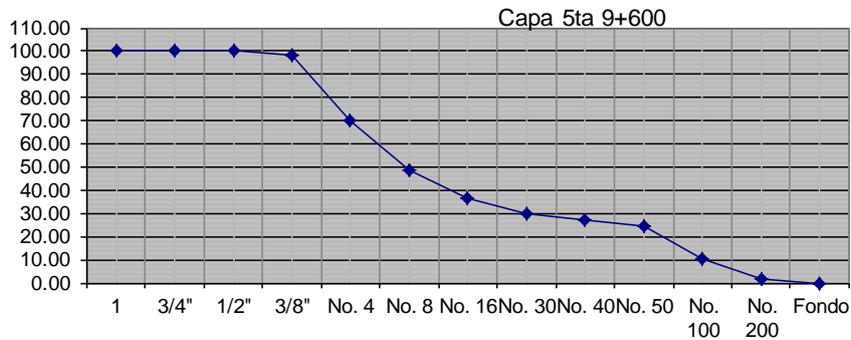
Capa:

Quinta

Peso de la muestra húmeda (a) 0.399 gr

Peso de la muestra seca (b) 0.308 gr

Tamiz		Peso Retenido Parcial	% Retenido	% Retenido Acumulado	% Pasa Acumulado	Especificación	
in	mm						
1	25.400	0.00	0.00	0.00	100.00		
3/4"	19.050	0.00	0.00	0.00	100.00		
1/2"	12.700	0.00	0.00	0.00	100.00		
3/8"	9.500	0.0040	1.69	1.69	98.31		
No. 4	4.750	0.0670	28.39	30.08	69.92		
No. 8	2.360	0.0500	21.19	51.27	48.73		
No. 16	1.180	0.0280	11.86	63.14	36.86		
No. 30	0.600	0.0170	7.20	70.34	29.66		
No. 40	0.425	0.0060	2.54	72.88	27.12		
No. 50	0.300	0.0060	2.54	75.42	24.58		
No. 100	0.150	0.0330	13.98	89.41	10.59		
No. 200	0.075	0.0210	8.90	98.31	1.69		
Fondo		0.0040	1.69	100.00	0.00		
Pasa 200		0.2360					



D <sub>60</sub> :	3.60 mm
D <sub>30</sub> :	0.65 mm
D <sub>10</sub> (diámetro efectivo):	0.15 mm
Coefficiente de uniformidad (Cu):	23.24
Grado de curvatura (Cc):	0.76

## **COEFICIENTES DE PERMEABILIDAD**

Abscisa	Estrato	c	d10 (cms)	cm/s	m/s
<b>0+000</b>	1era capa	116	0.034	1.34E-01	1.34E-03
	2da capa	116	0.139	2.24E+00	2.24E-02
	3era capa	116	0.013	1.96E-02	1.96E-04
<b>1+000</b>	1era capa	116	0.133	2.05E+00	2.05E-02
	2da capa	116	0.107	1.33E+00	1.33E-02
	3era capa	116	0.022	5.61E-02	5.61E-04
<b>4+100</b>	1era capa	116	0.11	1.40E+00	1.40E-02
	2da capa	116	0.25	7.25E+00	7.25E-02
	3era capa	116	0.02	4.64E-02	4.64E-04
<b>9+600</b>	1era capa	116	0.011	1.40E-02	1.40E-04
	2da capa	116	0.131	1.99E+00	1.99E-02
	3era capa	116	0.164	3.12E+00	3.12E-02
	4ta capa	116	0.009	9.40E-03	9.40E-05
	5ta capa	116	0.015	2.61E-02	2.61E-04

Coeficiente de permeabilidad por estratos.

Abscisa	Estrato	Espesor de capa (m)	Ki*hi	H (m)	KMH (m/seg)
<b>0+000</b>	1era capa	0.30	4.02E-04		7.93E-03
	2da capa	0.35	7.84E-03		
	3era capa	0.40	7.84E-05	1.05	
<b>1+000</b>	1era capa	0.31	6.36E-03		1.17E-02
	2da capa	0.40	5.31E-03		
	3era capa	0.30	1.68E-04	1.01	
<b>4+100</b>	1era capa	0.63	8.84E-03		3.06E-02
	2da capa	0.40	2.90E-02		
	3era capa	0.21	9.74E-05	1.24	
<b>9+600</b>	1era capa	0.30	4.21E-05		9.38E-03
	2da capa	0.20	3.98E-03		
	3era capa	0.20	6.24E-03		
	4ta capa	0.30	2.82E-05		
	5ta capa	0.10	2.61E-05	1.10	

Coeficiente de permeabilidad horizontal.

Abscisa	Estrato	Espesor de capa (m)	Ki*hi	H (m)	KMV (m/seg)
<b>0+000</b>	1era capa	0.30	2.24E+02		4.61E-04
	2da capa	0.35	1.56E+01		
	3era capa	0.40	2.04E+03	1.05	
<b>1+000</b>	1era capa	0.31	1.51E+01		1.74E-03
	2da capa	0.40	3.01E+01		
	3era capa	0.30	5.34E+02	1.01	
<b>4+100</b>	1era capa	0.63	4.49E+01		2.47E-03
	2da capa	0.40	5.52E+00		
	3era capa	0.21	4.53E+02	1.24	
<b>9+600</b>	1era capa	0.30	2.14E+03		1.92E-04
	2da capa	0.20	1.00E+01		
	3era capa	0.20	6.41E+00		
	4ta capa	0.30	3.19E+03		
	5ta capa	0.10	3.83E+02	1.10	

Coefficiente de permeabilidad vertical.

Abscisa	Estrato	Espesor de capa (m)	KM (m/seg)
<b>0+000</b>	1era capa	0.30	1.83E-06
	2da capa	0.35	
	3era capa	0.40	
<b>1+000</b>	1era capa	0.31	1.02E-05
	2da capa	0.40	
	3era capa	0.30	
<b>4+100</b>	1era capa	0.63	3.77E-05
	2da capa	0.40	
	3era capa	0.21	
<b>9+600</b>	1era capa	0.30	9.00E-07
	2da capa	0.20	
	3era capa	0.20	
	4ta capa	0.30	
	5ta capa	0.10	

Coefficiente de permeabilidad promedio total.

## **MEDICIONES EN CAMPO**

ABSCISA 0+000		
Nivel de agua		
Tiempo (seg)	Excavación 1	Excavación 2
<b>0</b>	0.83	0
<b>3900</b>	0.61	0.035
<b>5040</b>	0.6	0.04
<b>6600</b>	0.59	0.045
<b>15002</b>	0	0

ABSCISA 1+000		
Nivel de agua		
Tiempo (seg)	Excavación 1	Excavación 2
<b>0</b>	0.73	0
<b>420</b>	0.66	0.15
<b>540</b>	0.63	0.18
<b>900</b>	0.59	0.19
<b>2880</b>	0.485	0.22
<b>3780</b>	0.465	0.225

ABSCISA 4+100		
Nivel de agua		
Tiempo (seg)	Excavación 1	Excavación 2
<b>0</b>	0.90	0
<b>900</b>	0.90	0.003
<b>1800</b>	0.90	0.006
<b>2700</b>	0.90	0.009
<b>3600</b>	0.90	0.012
<b>4500</b>	0.90	0.015
<b>5400</b>	0.90	0.018
<b>6300</b>	0.90	0.021
<b>7200</b>	0.90	0.024
<b>8100</b>	0.90	0.027
<b>9000</b>	0.90	0.03
<b>9900</b>	0.90	0.033
<b>10800</b>	0.90	0.036
<b>11700</b>	0.90	0.039

<b>12600</b>	0.90	0.042
<b>13500</b>	0.90	0.045
<b>14400</b>	0.90	0.048
<b>15300</b>	0.90	0.051
<b>16200</b>	0.90	0.054
<b>17100</b>	0.90	0.057
<b>18000</b>	0.90	0.06
<b>18900</b>	0.90	0.063
<b>19800</b>	0.90	0.066
<b>20700</b>	0.90	0.069
<b>21600</b>	0.90	0.072
<b>22500</b>	0.90	0.075
<b>23400</b>	0.90	0.078
<b>24300</b>	0.90	0.081
<b>25200</b>	0.90	0.084
<b>26100</b>	0.90	0.087
<b>27000</b>	0.90	0.09
<b>27900</b>	0.90	0.093
<b>28800</b>	0.90	0.096
<b>29700</b>	0.90	0.099
<b>30600</b>	0.90	0.102
<b>31500</b>	0.90	0.105
<b>32400</b>	0.90	0.108
<b>33300</b>	0.90	0.111
<b>34200</b>	0.90	0.114
<b>35100</b>	0.90	0.117
<b>36000</b>	0.90	0.12
<b>36900</b>	0.90	0.123
<b>37800</b>	0.90	0.126
<b>38700</b>	0.90	0.129
<b>39600</b>	0.90	0.132
<b>40500</b>	0.90	0.135

<b>ABSCISA 9+600</b>		
<b>Nivel de agua</b>		
<b>Tiempo (seg)</b>	<b>Excavación 1</b>	<b>Excavación 2</b>
<b>0</b>	0.92	0.00
<b>900</b>	0.92	0.05
<b>1800</b>	0.92	0.09
<b>2700</b>	0.92	0.13
<b>3600</b>	0.92	0.15
<b>4500</b>	0.92	0.18
<b>5400</b>	0.92	0.20
<b>6300</b>	0.92	0.23
<b>7200</b>	0.92	0.26
<b>8100</b>	0.92	0.29
<b>9000</b>	0.92	0.31
<b>9900</b>	0.92	0.33
<b>10800</b>	0.92	0.35
<b>11700</b>	0.92	0.37
<b>12600</b>	0.92	0.39
<b>13500</b>	0.92	0.40
<b>14400</b>	0.92	0.41
<b>15300</b>	0.92	0.42
<b>16200</b>	0.92	0.44
<b>17100</b>	0.92	0.46
<b>18000</b>	0.92	0.47
<b>18900</b>	0.92	0.48
<b>19800</b>	0.92	0.50
<b>20700</b>	0.92	0.52
<b>21600</b>	0.92	0.53
<b>22500</b>	0.92	0.54
<b>23400</b>	0.92	0.55
<b>24300</b>	0.92	0.56
<b>25200</b>	0.92	0.57
<b>26100</b>	0.92	0.58
<b>27000</b>	0.92	0.60
<b>27900</b>	0.92	0.61
<b>28800</b>	0.92	0.62
<b>29700</b>	0.92	0.63
<b>30600</b>	0.92	0.64
<b>31500</b>	0.92	0.65

<b>32400</b>	0.92	0.66
<b>33300</b>	0.92	0.67
<b>34200</b>	0.92	0.67
<b>35100</b>	0.92	0.68
<b>36000</b>	0.92	0.68
<b>36900</b>	0.92	0.68
<b>37800</b>	0.92	0.68
<b>38700</b>	0.92	0.68
<b>39600</b>	0.92	0.68
<b>40500</b>	0.92	0.68

# **CAUDAL DE INFILTRACIÓN**

Abcisas	Wp (m)	K (m/seg)	Hw(m)	Lf(m)	Hwe (m)	Qinf (m3/s/m)
<b>0+000</b>	7.32	1.96E-04	0.33	0.40	-0.35	3.87E-03
<b>1+000</b>	6.78	5.61E-04	0.35	0.30	-0.35	1.27E-02

Cálculo de caudales de infiltración.

Abcisas	h1 (m)	h2 (m)	K (m/seg)	L (m)	Qinf (m3/s/m)
<b>4+100</b>	1.08	0.70	4.64E-04	58.40	5.37E-06
<b>9+600</b>	0.91	0.60	2.61E-04	52.00	2.35E-06

Cálculo de caudales de infiltración.

Abcisas	Qinf (m3/s/m)
<b>0+000</b>	3.87E-03
<b>1+000</b>	1.27E-02
<b>4+100</b>	5.37E-06
<b>9+600</b>	2.35E-06

Resumen de Caudales de infiltración.

Abcisas	Qinf (m3/s)	Qacum (m3/s)
	0	4.600
<b>0+000</b>	3.87E-03	4.596
<b>1+000</b>	1.27E-02	4.583
<b>4+100</b>	5.37E-06	4.583
<b>9+600</b>	2.35E-06	4.583

Pérdidas producidas.

# **PUBLICACIONES**

## SEEPAGE THROUGH SATURATED AND UNSATURATED LAYERS

DR. G. KOVÁCS\*

ABSTRACT. The paper gives a unified method, which is suitable to characterize all kind of seepage. For this purpose the various types of seepage are classified as follows:

*Seepage through saturated porous media;*

turbulent seepage  
second transition zone  
first transition zone  
laminar seepage  
microseepage

*Seepage in the unsaturated zone.*

The dynamic investigation of the various groups, makes it possible to determine the numerical limits between the above mentioned validity zones and the general form of movement equations for each group. The basis of this investigation is a series of dimensionless numbers formed as a quotient of the dominating resistive force, and the neglected one in the case of the limits of the validity zones, and determined as a ratio of the acting main resistive force to gravity for deducing the general form of the movement equations.

Apart from the dynamic investigation, the use of a physical model constructed from straight pipes instead of the actual channels of pores in the porous medium was the common basis of investigation of the various types of seepage. The checking of the proposed model testified that the pipes must be constructed from short stretches with two different diameters (Fig. 1.). The correct description of each type of seepage can be ensured by the use of this model.

After determining the suitable model-system, the equilibrium of the acting forces, dominating in the various validity zones can be described similarly to well-known *Poiseuille's* equation. The final form of the movement equations, and their numerical factors can be deduced in this way.

It is well known, that the order of the relationship between velocity and hydraulic gradient differs in the various validity zones of seepage. *Darcy's* coefficient of permeability has to be supplemented by a factor characterizing the state of flow and including all effects, which differ from that of laminar seepage. These factors are given in the paper for all types of seepage in saturated porous media, summarizing the results of previous investigations. This summary is completed by the detailed deduction of equations for describing water movement in unsaturated layers.

RÉSUMÉ. L'étude donne une méthode unifiée, qui se prête à caractériser les infiltrations de tous genres. En ce but les différents types d'infiltration ont été classifiés de manière suivante:

*Infiltration à travers des milieux poreux saturés;*

Infiltration turbulente  
Première zone de transition  
Seconde zone de transition  
Infiltration laminaire  
Microinfiltration

*Infiltration dans la zone non saturée.*

Les investigations dynamiques des groupes divers nous permettent de déterminer les limites numériques entre les zones de validité mentionnées ci-dessus, et la forme générale des équations du mouvement pour chaque groupe. La base de ces investigations est une série de nombres sans dimensions, formés en quotient de la force résistive dominante et de celle qui est négligée, en cas des limites des zones de validité, et déterminés en raison de la force résistive agissante à la pesanteur, pour déduire la forme générale des équations du mouvement.

À part des investigations dynamiques, la base commune des investigations des différentes catégories d'infiltration était l'emploi d'un modèle physique, construit de tubules droits, remplaçant les conduites d'eau déjà existantes dans les pores du milieu poreux. L'examen du modèle proposé a prouvé que les tuyaux doivent être construits de courts tronçons, à deux différents diamètres. (Fig. 1.). La description correcte de chaque type d'infiltration est assurée en se servant de ce modèle.

Après avoir déterminé le système de modèle approprié, l'équilibre des forces agissantes, dominant dans les différentes zones de validité, peut être défini d'une manière semblable à l'équation bien connue de *Poiseuille*. La forme ultime des équations de mouvement et leur facteurs numériques peuvent être déduits de cette manière.

\* Deputy Director, Research Institute for Water Resources Development, Budapest, Hungary.

C'est bien connu, que l'ordre du rapport vélocité et gradient hydraulique diffère dans les diverses zones de validité d'infiltration. Le coefficient de *Darcy* doit être complété par un facteur caractérisant l'écoulement et contenant tous les effets qui diffèrent de l'infiltration laminaire. Ces facteurs sont donnés dans l'étude pour tous les types d'infiltrations en milieux poreux saturés, en même-temps résumant les résultats des investigations antérieures. Ce résumé est complété par la déduction détaillée des équations pour représenter le mouvement d'eau dans les couches non saturées.

## 1. THE AIM OF THE INVESTIGATION

A series of papers was presented on the 13th Congress of IAHR in 1969. The first of these gives the general dynamic interpretation of the various types of seepage, and on the basis of the classification the validity zones of the types discussed (Kovács, 1969/a). The classification includes only the investigation of seepage through saturated porous media. The second and the third papers supplement the first, giving the detailed interpretation and proposing practical methods for describing seepage with lower velocity than that in the validity zone of *Darcy's law (microseepage)* (Kovács, 1969/b) and with high velocity (*transition and turbulent zones*) as well (Kovács, 1969/c).

Apart from the dynamic interpretation the use of a physical model constructed from straight pipes instead of the actual channels of pores in the porous medium was the common basis of the previously mentioned investigations. The correctness of the *Kozeny-Carman* equation for calculating the permeability coefficient in the *Darcy-zone* can also be proved by this physical model. Thus it can be stated, that the use of the model created the theoretical basis for the characterization of seepage within the whole range of flow in saturated porous media.

The purpose of this paper is to summarize the results of the afore-mentioned papers and to complete the previous investigations amplifying those with describing water movement in unsaturated layers. For this purpose first the results of investigations on seepage in saturated soil will be shortly discussed. This will be followed by a short information on the general characterization of seepage in unsaturated zone, collected from the literature. The last step is the physical and mathematical interpretation of flow through unsaturated medium. This topic is divided into two parts, the first dealing with the permeability of unsaturated soil and the second with solving the differential equation of movement when it is influenced not only by gravity but also by the tension between grains and water.

## 2. SUMMARY OF RESULTS CONCERNING SEEPAGE IN SATURATED LAYER

According to the Newtonian axioms in the case of steady movement the forces accelerating motion are balanced by the resistive forces. It can be supposed, that seepage in saturated layer is maintained only by gravity ( $G$ ), because other accelerating forces can be generally neglected (e.g. the vapour- and gaspressure in deep layers) or those can be taken into consideration as an additional part of gravity (e.g. the pressure of the overlying layers). Among resistive forces three can be dominant when investigating percolation through saturated layer: inertial force ( $T$ ) friction ( $S$ ) and the molecular forces between grains and water ( $E$ ). The rate of the resistive forces influencing movement determines the types of seepage and validity zones can be separated by a given numerical value of a dimensionless number calculated as the quotient of the neglected resistive force and that taken into account.

On the basis of this explanation seepage in saturated zone can be divided into four main groups, but one of these, the transition zone between turbulent and laminar movement has to be separated into two further subgroups, thus five groups have to be characterized:

- *turbulent seepage*; there is only one main resistive force, the inertia; the zone of its validity being  $1000 < Re_p < \infty$ ;
- *second transition zone*; among the resistive forces there are two dominants, the inertia and the friction, but the former has more important role than the latter; this type is valid if  $100 < Re_p < 1000$ ;

- *the first transition zone*; the main resistive forces are also the inertia and the friction, the latter having higher weight; the zone of validity is  $10 < Re_p < 100$ ;
- *laminar seepage*; the most important zone where the dominant resistive force is the friction and the others can be neglected; the linear relationship describing the seepage in this zone is valid if  $0 < Re_p < 10$ ;
- *microseepage*; if the grains are very small the role of the interaction between grains and water becomes dominant apart from friction; the limit of its validity can be measured by the quotient of the actual gradient ( $J$ ) and the threshold gradient ( $J_0$ ):  $J/J_0 < 12$ .

It is evident that the limits of validity zones in the case of the first four types can be given by the rate of inertia and friction, and the upper limit of *microseepage* by that of molecular forces and friction. It was verified in a previously presented paper (Kovács, 1966), that the quotients in question are proportional to the dimensionless number used for measuring the various ranges of validity.

$$\frac{T}{S} \propto Re; \quad \frac{E}{S} \propto Ko_2 \propto \frac{J_0}{J}. \quad 1.$$

Similar dimensionless numbers can be determined for each zone relating the dominant resistive force or the sum of the two main resistive forces to gravity. From these numbers combined with the hydraulic gradient between two investigated sections the general relationships describing the movement in each zone can be deduced, which are really the simplified forms of the *Navier-Stokes* equation. The equation relating to the various zones of seepage are as follows:

- turbulent zone

$$\frac{T}{G} \propto Fr; \quad J = av^2; \quad 2.$$

- transition zones

$$\frac{T+S}{G} \propto Ko_4; \quad J = av^2 + bv; \quad 3.$$

- laminar zone

$$\frac{S}{G} \propto MK; \quad v = bJ; \quad 4.$$

- *microseepage*

$$\frac{E+S}{G} \propto Ko_3; \quad v = c_1 J - c_2 J_0. \quad 5.$$

Some of the listed dimensionless numbers are well known from hydraulic literature:  $Fr$  is the Froude number,  $Re$  is the *Reynolds* number and  $MK$  the *Mosonyi-Kovács* number used for calculating hydraulic models of seepage (*Mosonyi-Kovács*, 1956). Others were constructed for the dynamic classification of seepage. In connection with the numerical determination of limits between the validity zones, having higher velocity than that in the zone of laminar seepage, the symbol  $Re_p$  is used. This means, that the *Reynolds* number is calculated from the data of pipes, hydraulically equivalent to the channels of pores between the grains of layers. As it is well known, the *Reynolds* number is the product of characteristic velocity and length divided by kinematic viscosity. Investigating water movement through porous media seepage velocity and effective grain-diameter are chosen as characteristic values, but it was found, that better results can be achieved by using the effective mean velocity and the average pore-size, and the latter can be measured by the diameter of the substituting pipes.

For the determination of the relationship between seepage *Reynolds* number ( $Re_s$ ) and that for the pipe-system ( $Re_p$ ) and also for calculating the factors in Eqs. 2–5. the definition of the substituting pipe-system must be summarized.

According to the dynamic investigation of laminar seepage, movement is determined by the quotient of friction and gravity. The former is proportional to the surface of grains and the latter to the volume of water, thus — in an indirect way — to the volume of grains as well. For this reason the ratio of the surface of grains to the volume of water (or grains) should be the same in the original system as in the replacing one. This was the basis of the determination of *Koženy's* effective diameter ( $D_h$ ) (*Koženy*, 1952).

The ratio of the surface to the volume of grains depends also on the shape of grains. It is necessary, therefore, from the aspect of this investigation, to determine a shape coefficient ( $\alpha$ ) which can be established as the quotient of the surface ( $F$ ) and the volume ( $V$ ) of the grains (*Kovács*, 1968/a):

$$\frac{F}{V} = \frac{\alpha}{D}; \quad 6.$$

where  $D$  is the diameter of the sphere encircling the grain considered.

From the condition that the quotient of the inner volume and the surface of the model pipe should be equal to the rate of the surface of grains and the pore volume ( $V_0$ ) the pipe diameter ( $d_0$ ) can be calculated.

$$d_0 = 4 \frac{n}{1-n} \frac{D_h}{\alpha}. \quad 7.$$

The number of pipes within a unit cross-section ( $N$ ) can also be determined. The basis of this calculation is the condition, that the total cross-sectional area of the pipes within a unit area be equal to porosity ( $n$ ):

$$N = \frac{4n}{d_0^2 \pi}. \quad 8.$$

From Eq. 7. the relationship between  $Re_s$  and  $Re_p$  can be determined:

$$Re_p = \frac{V_{eff} d_0}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \frac{v}{n} 4 \frac{n}{1-n} \frac{D_h}{\alpha} = \frac{v D_h}{\gamma} \frac{4}{\alpha} \frac{1}{1-n} = \frac{4}{\alpha} \frac{1}{1-n} Re_s. \quad 9.$$

After determining the pipe-diameter and the number of pipes in the model-system, the discharge of the latter can be calculated in the case of laminar movement by *Poiseuille's* equation. The theoretical coefficient of permeability of the pipes is also given in this way. This value — as compared to the results of some very precise measurements carried out with homodisperse samples of spheres (*Zuncker*, 1930; *Lindquist*, 1933; *Carman*, 1956) — is 2,5 times greater than the effective *Darcy's* coefficient of permeability. The difference may be caused by three facts:

- the cross-section of the channels between the grains is not circular;
- the channels are longer than the length of the sample because of tortuosity;
- the size of the cross-section along the channels is not a constant value, and, therefore, the model pipe should be constructed from diffusors and confusors.

The divergence from the circular shape can be taken into account and the result can be corrected using a coefficient between 1,2~0,8 (*Forchheimer*, 1924; *Engelhardt*, 1960). Thus, apparently, this phenomenon can affect the difference mentioned above, but very slightly. *Carman*, when investigating the process, endeavoured to explain it by tortuosity. In our opinion the third explanation seems to be the most probable one, because in this way non-laminar seepage can also be characterized.

Lindquist pointed out, that the ratio of the widest cross-section of the pores to the narrowest one may be even 10, but this quotient is an extreme value characterizing only one point of the channel. The discharge of a pipe consisting of short stretches with two different diameters ( $d_1$  and  $d_2$  Fig. 1.) can also be calculated using Poiseuille's equation and can be represented as a function of the ratio  $(d_1/d_2)^2$  (Fig. 2.). It can be stated that if this ratio becomes 1:3 ~ 1:3,5 then the discharge will be 2,5 times smaller than that of a circular pipe with constant  $d_0$  diameter, almost independently of the shape of pipes. On the other hand, Stakman's experiments

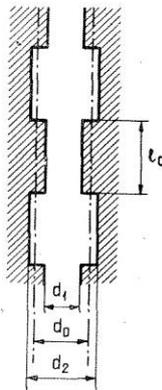


Fig. 1. Measurement of the model pipe, substituting the network of pores in loose clastic sediments

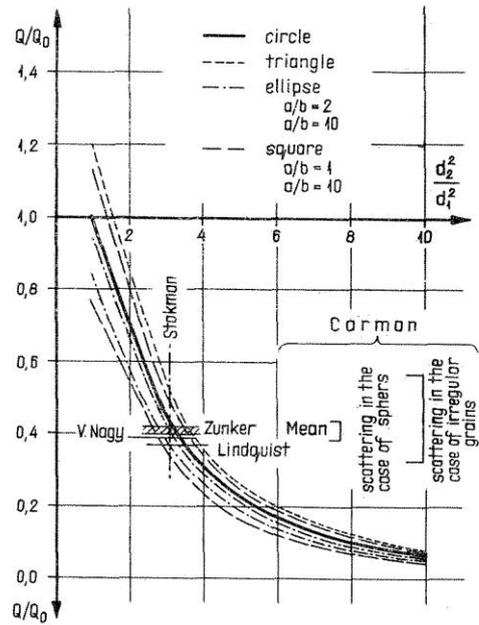


Fig. 2. Rate of discharge of the pipe constructed from various stretches to that of pipe with constant diameter as a function of the ratio between the used diameters

gave the same ratio as the most likely quotient of the smallest and largest pore cross-sections measured by air bubbling pressure (Stakman, 1966). On the basis of the foregoing the geometrical data of the model pipe can be determined as follows:

$$\frac{d_2}{d_1} = 1,86; \quad d_1 = \frac{d_0}{1,5}; \quad d_2 = 1,25d_0; \quad l_0 = 1,0 \sim 1,5 d_0. \quad 10.$$

As a final result Darcy's coefficient of permeability of the sample can be calculated solving Poiseuille's equation determined for the model pipe-system:

$$k_D = \frac{1}{5} \frac{\gamma}{\eta} \frac{n^3}{(1-n)^2} \left( \frac{D_h}{\alpha} \right)^2; \quad 11.$$

where the characteristic of the moving fluid is given by the ratio of specific weight ( $\gamma$ ) to dynamic viscosity ( $\eta$ ), which is equal to the quotient of gravitational acceleration and kinematic viscosity ( $g/\nu$ ); and the other numbers of the equation are for describing all of the important features of the layer:

$$K = \frac{1}{5} \frac{n^3}{(1-n)^2} \left( \frac{D_h}{\alpha} \right)^2. \quad 12.$$

Eq. 11. is practically equal to *Kozeny-Carman's* equation, supplemented with the effect of grain shape and giving a definite value for the numerical constant. The detailed justification of this relationship is given in a previous paper (*Kovács, 1971*).

It is well known, that the order of the relationship between velocity and hydraulic gradient differs in the various validity zones of seepage. *Darcy's* coefficient of permeability can be supplemented by a factor characterizing the state of flow and including all effects which differ from that of laminar seepage. In that case the linear relationship can be generalized:

$$v = kJ; \quad \text{where } k = \Phi k_D \quad \text{and} \quad \Phi = f(\text{Re}_p; J_0/J); \quad 13.$$

consequently the factor is a function of the dimensionless numbers determining the limits between validity zones including  $v$  or  $I$  as independent variables and ensures, therefore, the correct relationship between velocity and hydraulic gradient if the latter is non-linear.

It was shown previously, that the acting forces differ from each other in the various zones.

The basic equation of movement can be determined, similarly to *Poiseuille's* equation, taking all the main forces into consideration and using the system of the model pipes. In this way the various  $\Phi$  functions and also the  $a, b, c$  constants of Eq. 2-5. can be determined making those equations suitable for numerical application.

Starting with the investigation of the range of the smallest velocity the modified *Poiseuille's* equation has to be determined taking the effect of the molecular forces into account describing the behaviour of the non-Newtonian fluid, the shearing stress of which is composed of a static part ( $\tau_0$ ) and another one depending on viscosity ( $\eta$ ) and velocity gradient  $\left( \frac{dv}{dn} \right)$ . The supplemented basic equation is (*Fig. 3.*):

$$J\gamma r = 2 \left[ \tau_0(r) - \eta \frac{dv}{dr} \right]. \quad 14.$$

The deduction and the solution of this equation can be found in a paper mentioned previously (*Kovács, 1969/b*). The ratio of the mean velocity in the tube calculated in this way to that determined from the original *Poiseuille's* equation is the same as the quotient of the velocity of microseepage and that defined as the product of the hydraulic gradient and *Darcy's* coefficient of permeability:

$$\frac{v_M}{v_D} = \frac{k_M}{k_D} = \left( 1 - \frac{J_0}{J} \right)^2 - \frac{2J_0}{3J} \left[ \left( 1 - \frac{J_0}{J} \right)^{3/2} \text{Arth} \left( 1 - \frac{J_0}{J} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \ln \frac{J_0}{J} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{J_0}{J} \right) \right]. \quad 15.$$

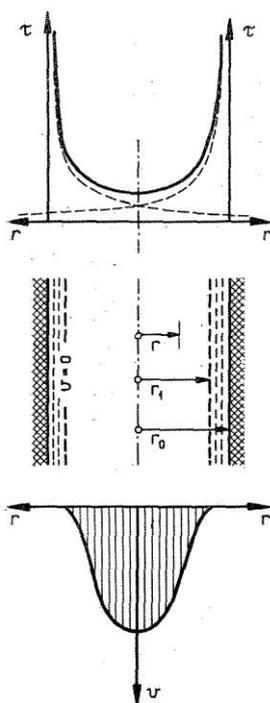


Fig. 3. Distribution of shearing stress and velocity in a pipe

The second member on the right-hand side tends to zero when  $I$  is increasing. The whole range of the gradient can be divided, therefore into two parts. In the first zone ( $I < 12 I_0$ , microseepage) Eq. 15. can be approximated by a parabola having horizontal tangent at the point  $v=0$ ;  $I=I_0$  and a slope equal to  $k_D$  at the other limit. ( $I=12 I_0$ ;  $v=10 k_D$ ):

$$\begin{aligned} v_M &= 0,714 \frac{k_D}{J_0^{0,1}} (J - J_0)^{1,1} ; \\ k_M &= 0,714 \frac{k_D}{J_0^{0,1}} \frac{(J - J_0)^{1,1}}{J} ; \\ \Phi_M &= 0,714 \frac{(J - J_0)^{1,1}}{J_0^{0,1} J} . \end{aligned} \quad 16.$$

In the zone of laminar seepage i.e.  $I > 12 I_0$ , the second member of Eq. 15. can be neglected, even the quadratic form of  $I_0/I$  tends to zero, thus the relationship of velocity and gradient can be represented by a straight line (Fig. 4.):

$$\frac{v_L}{v_D} = 1 - 2 \frac{J_0}{J} + \left( \frac{J_0}{J} \right)^2 \sim 1 - 2 \frac{J_0}{J} . \quad 17.$$

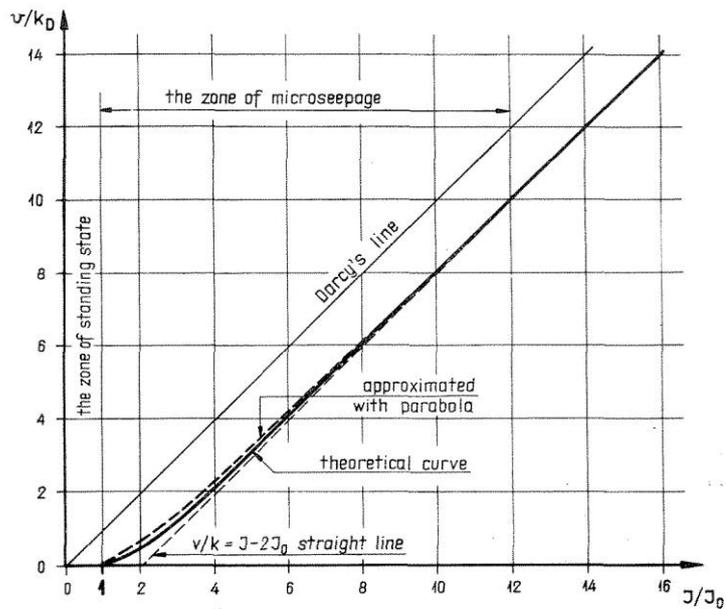


Fig. 4. Relationship between velocity and hydraulic gradient in the zone of microseepage

From Eq. 17. the formula summarized in Eq. 13. are as follows:

$$\begin{aligned} v_L &= k_D (J - 2 J_0); \\ k_L &= k_D \left( 1 - 2 \frac{J_0}{J} \right); \\ \Phi_L &= \left( 1 - 2 \frac{J_0}{J} \right). \end{aligned} \quad 18.$$

Fig. 4. and Eq. 18. demonstrate that theoretically *Darcy's* law is not valid even in the case of laminar flow. The relationship curve in Fig. 4. is a straight line, which does not start from the origo but intersects the horizontal axis at the point  $I=2 I_0$ . In practice, however, the effect of the threshold gradient can be neglected because its value is very small as compared to the actual gradient (in the range of  $D_h=0,1 \sim 1,0$  mm  $I_0=0,05 \sim 0,005$ ). *Darcy's* equations can be, therefore, used instead of Eq. 18.:

$$v_D = k_D J; \quad \text{and} \quad \Phi_D = 1. \quad 19.$$

Seepage in the laminar zone and in that with higher velocity was investigated on experimental basis. About 300 data from 14 various experimental series executed in 4 different laboratories were collected to characterize the relationship between velocity and gradient in the case of homodisperse samples. In a co-ordinate system, having  $Re_p$  on the horizontal axis and  $\lambda Re_p \frac{1}{4\alpha} \frac{n^3}{(1-n)}$  on the vertical (where  $\lambda$  is the coefficient of resistance according to *Chézy's* equation) the points representing the measured data fit very well to a continuous curve, the equation of which is (Fig. 5.):

$$\left[ \frac{2}{9,3} \frac{9}{v} \frac{n^3}{(1-n)^2} \left( \frac{D_h}{v} \right)^2 \frac{J}{v} \right]^{3/4} - \left[ \frac{1}{100} \frac{D_h}{\alpha} \frac{4}{1-n} \frac{v}{v} \right]^{3/4} = 1. \quad 20.$$

From Eq. 20. a formula can be defined showing the relationship between velocity and hydraulic gradient in the whole range of velocity ( $0 < Re < \infty$ ):

$$J = v [A + B (v)^{3/4}]^{4/3}$$

where

$$\begin{aligned} A &= \left[ \frac{9,3}{2} \frac{\gamma}{g} \frac{(1-n)^2}{n^3} \left( \frac{\alpha}{D_h} \right)^2 \right]^{3/4} \sim \left( \frac{1}{k_D} \right)^{3/4}; \\ B &= \left[ \frac{9,3}{50} \frac{1}{g} \frac{1-n}{n^3} \frac{\alpha}{D_h} \right]^{3/4} \sim \left( \frac{d_0}{nk_D} \frac{0,01}{\gamma} \right)^{3/4}. \end{aligned} \quad 21.$$

For simplification the secants of the curve can be used instead of the continuous relationship (Fig. 6.). In the laminar zone ( $Re_p < 10$ ) using a horizontal secant characterized with  $\lambda Re_p \frac{1}{4\alpha} \frac{n^3}{1-n} = 10$  value, Eq. 19. is given back with a coefficient of permeability equal to that from *Poiseuille's* equation for the model pipe system (Eq. 11.).

The secants representing the first and second transition zones and also the lines of the laminar and turbulent zones at the limits of validity zones must intersect each other. From this

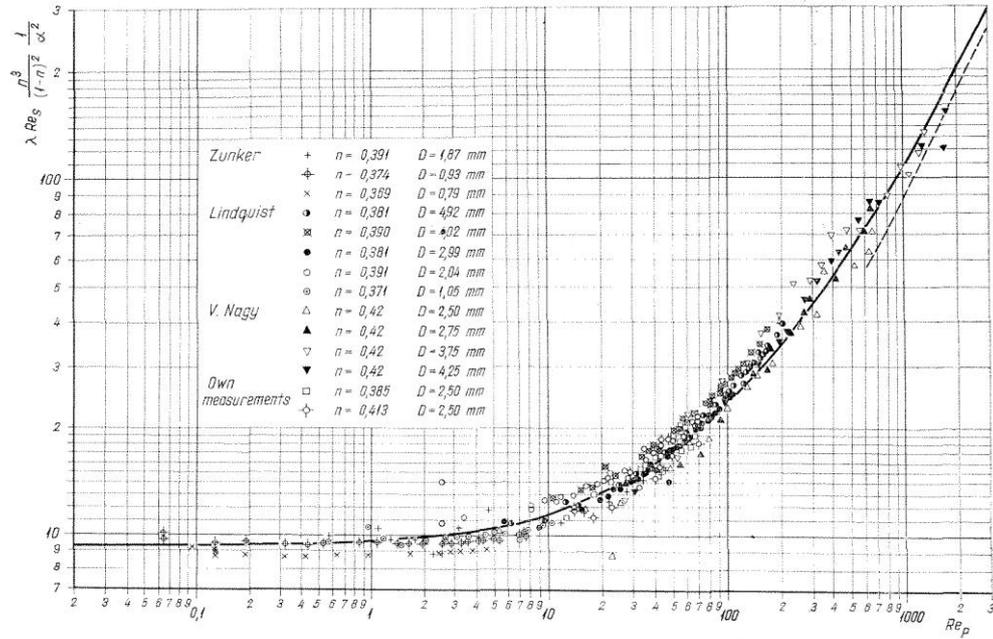


Fig. 5. Relationship between the coefficient of resistance and Reynolds number (measured data)

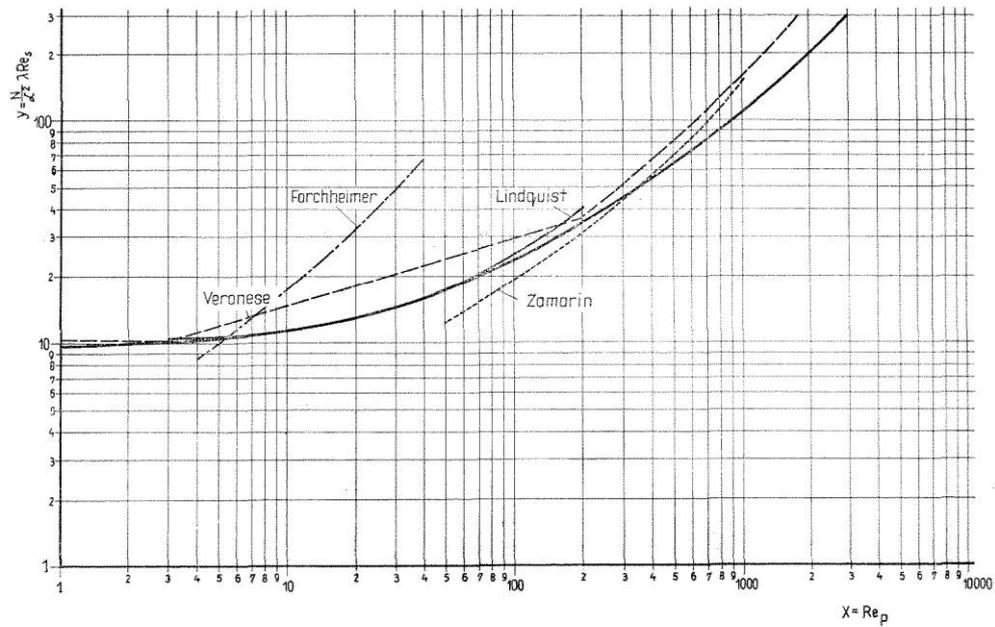


Fig. 6. Relationship between the coefficient of resistance and Reynolds number (representation of equations published previously in literature)

condition the following simplified formula can be determined in the first transition zone:

$$\begin{aligned}
 J &= a_1 v_{T1}^2 + b_1 v_{T1}; & v_{T1} &= \frac{J}{a_1 v_{T1} + b_1} = \frac{k_D J}{0,8 + 0,02 Re_p}; \\
 k_{T1} &= \frac{k_D}{0,8 + 0,02 Re_p}; \\
 \Phi_{T1} &= \frac{1}{0,8 + 0,02 Re_p};
 \end{aligned} \tag{22}$$

and in the second transition zone:

$$\begin{aligned}
 J &= a_2 v_{T2}^2 + b_2 v_{T2}; & v_{T2} &= \frac{J}{a_2 v_{T2} + b_2} = \frac{k_D J}{2,0 + 0,008 Re_p}; \\
 k_{T2} &= \frac{k_D}{2,0 + 0,008 Re_p}; \\
 \Phi_{T2} &= \frac{1}{2,0 + 0,008 Re_p}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Finally in the turbulent (*Froude's*) zone a secant going through the origo can be used:

$$\begin{aligned}
 J &= b v_F^2; & v_F &= J k_D \frac{100}{Re_p}; \\
 k_F &= k_D \frac{100}{Re_p}; \\
 \Phi_F &= \frac{100}{Re_p}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Eq. 24. can be easily transformed to the form of *Chézy's* equation

$$v_{F \text{ eff}} = \sqrt{\frac{2g}{1,6}} \sqrt{d_0 J}. \tag{25}$$

From the formula suggested for calculation of pipe resistance the total value including friction, and also diffusor and confusor resistances gives practically the same numerical value.

$$\lambda + \xi_1 + \xi_2 = 1,4 \sim 1,8. \tag{26}$$

This fact verifies the correctness of the proposed method, i.e. the use of the model pipe system.

### 3. INVESTIGATION OF SEEPAGE THROUGH UNSATURATED POROUS MEDIA

Dynamically this type of seepage can be characterized by the effects of gravity and molecular forces as main accelerating forces and the dominant resistive forces are friction and adhesion. The process is made more complicated by the fact that there is a possibility of water movement not only in liquid but in vapour phase as well, because on the border of water film with the air evaporation and condensation can occur. For simplification this phenomenon will be neglected, supposing that the water phase is a closed system without interaction with the air.

The thickness of the water film and together with it the tension on its surface is varying continuously, caused by the effect of water movement. It is a very rare case, therefore, that a steady movement can develop, because the difference of this tension between two points is one of the dominant accelerating forces. Thus the supposition of the steady state is also a simplifying approximation in the further investigation.

It was shown by previous investigation, that the resistance of an unsaturated layer is higher than that in saturated medium. The permeability coefficient of unsaturated sample ( $k_H$ ) is proportional to that in saturated state. The factor of proportionality can be expressed as a function of water content in the sample. The latter is generally measured by the coefficient of saturation ( $s$ ), which is the ratio of water content expressed in the percentage of volume ( $W$ ) to porosity ( $n$ ):

$$s = \frac{W}{n} \quad 27.$$

The function between the two variables can be given by graphs (Kézdi, 1962) by measured points (Polubarinova Kocsina, 1962) or by formulae (Averjanov, 1949/a; 1949/b; Irmay, 1945; Bear et al, 1968) as shown in Fig. 7. The common form of Irmay's and Averjanov's formulae is

$$k_H = k \left( \frac{s - s_0}{1 - s_0} \right)^\alpha \quad 28.$$

where  $s_0$  is the minimum coefficient of saturation. The power is given by Irmay as  $\alpha = 3,0$  and by Averjanov as  $\alpha = 3,5$ .

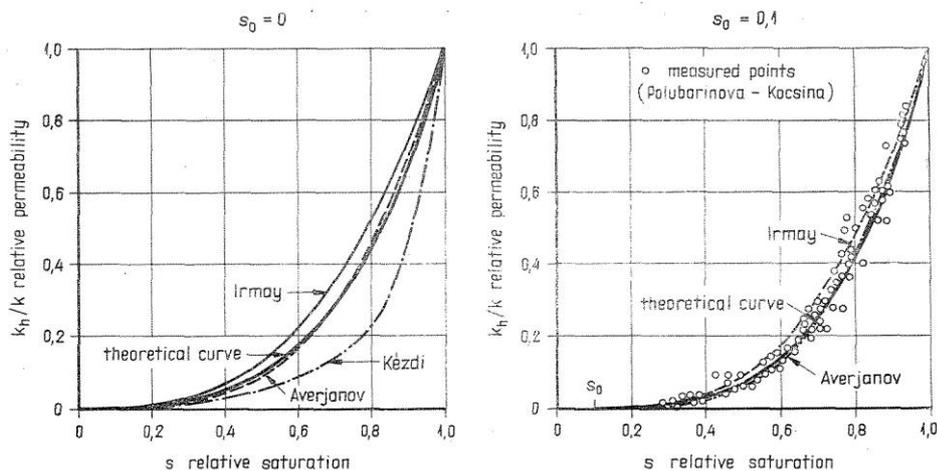


Fig. 7. Variation of coefficient of permeability as a function of relative saturation

It is evident, that when calculating seepage velocity in an unsaturated layer a further difference should be taken into consideration apart from the dissimilarity of permeability coefficients; i.e. the total hydraulic gradient is composed from the variation of gravitational potential and tension ( $\psi$ ) along the flow lines:

$$v_H = k_H \frac{d(h + \psi/\gamma)}{dx} \quad 29.$$

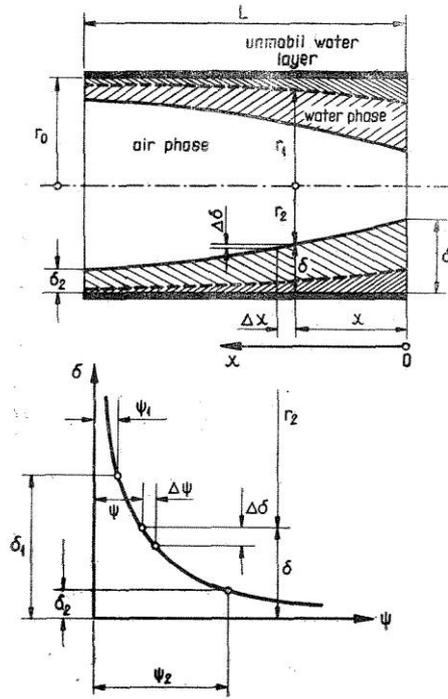


Fig. 8. Distribution of tension in an unsaturated pipe

A relationship can be also defined by using the model pipe system for characterizing this type of seepage. Symbols used for the deduction are shown in Fig. 8. For simplification of discussion let us suppose at first, that the resistive effect of molecular forces can be neglected. This hypothesis is identical with substituting  $s_0=0$  value in Eq. 28., and its results can be compared with laminar seepage in saturated layer.

The modified *Poiseuille's* equation taking the inner boundary condition into consideration is

$$\frac{J\gamma}{2\eta} \cdot \frac{r_2 - r_2^2}{r} = -\frac{dv}{dr} \quad 30.$$

Integrating it with the condition of  $v=0$ ,  $r=r_0$  velocity distribution is

$$v = \frac{J\gamma}{4\eta} (r_0^2 - r^2) - \frac{J\gamma}{2\eta} r_2^2 \ln \frac{r_0}{r} \quad 31.$$

The discharge and the virtual mean velocity (i.e. the discharge divided by the total cross-section) are

$$Q = 2\pi \int_{r_2}^{r_0} vr \, dr; \quad 32.$$

$$v_H = \frac{Q}{r_0^2 \tau} = \frac{J\gamma}{8\eta} r_0^2 \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{r_0} \right)^2 \right]^2 - 2 \left( \frac{r_2}{r_0} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{r_0} \right)^2 \right] - 2 \left( \frac{r_2}{r_0} \right)^4 \ln \frac{r_2}{r_0} \right\} \quad 33.$$

The volume of the pipe filled with water is proportional to  $(r_0^2 - r_2^2)$  and the total volume to  $r_0^2$ , thus a relation can be established between  $\frac{r_2}{r_0}$  and the coefficient of saturation

$$s = \frac{W}{n} = 1 - \left( \frac{r_2}{r_0} \right)^2 \quad 34.$$

The rate of the two coefficients of permeability, therefore is

$$\frac{k_H}{k_D} = s^2 - 2s(1-s) - 2(1-s)^2 \ln(1-s) \quad 35.$$

Repeating the investigation with taking the resistive effect of molecular forces into consideration, the basic equation will be as follows:

$$\frac{J\gamma}{2\eta} \cdot \frac{r^2 - r_2^2}{r} = \frac{\tau_0}{\eta} \frac{dv}{dr} \quad 36.$$

During the investigation of microseepage it became clear, that the velocity is composed of two parts, one originated from the  $-\frac{dv}{dr}$  member of the basic equation and the other from  $\frac{\tau_0}{\eta}$ . The other result was, that the latter can be neglected when  $I > 12 I_0$ . The same hypothesis can be accepted in the investigation of seepage through an unsaturated layer as well. This approximation gives only a very slight change in the equation for calculating the local velocity i.e. the boundary condition is  $v=0$  if  $r=r_1$ :

$$v = \frac{J\gamma}{4\eta} (r_1^2 - r^2) - \frac{J\gamma}{2\eta} r_2^2 \ln \frac{r_1}{r}. \quad 37.$$

Following the same steps made in the foregoing, the mean velocity is

$$v_H = \frac{J\gamma}{8\eta} r_0^2 \left\{ \left[ \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^2 - \left( \frac{r_2}{r_0} \right)^2 \right]^2 - 2 \left( \frac{r_2}{r_0} \right)^2 \left[ \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^2 - \left( \frac{r_2}{r_0} \right)^2 \right] - 2 \left( \frac{r_2}{r_0} \right)^4 \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right\}. \quad 38.$$

Similarly to Eq. 34. the  $s_0$  value can also be expressed by the geometrical data of the pipe.

$$s_0 = 1 - \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^2, \quad 39.$$

and the permeability coefficient for the laminar zone given in Eq. 18., therefore, can be rewritten in the following form:

$$k_L = \frac{\gamma r_0^2}{8\eta} \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^4. \quad 40.$$

From Eq. 38., 39. and 40. the relative coefficient of permeability is

$$\frac{k_H}{k_L} = \left( \frac{s-s_0}{1-s_0} \right)^2 - 2 \frac{(1-s)(s-s_0)}{(1-s_0)^2} - 2 \left( \frac{1-s}{1-s_0} \right)^2 \ln \frac{1-s}{1-s_0}. \quad 41.$$

The first member of Eq. 41. has the same form as the quotient of the two permeability coefficients according to Eq. 28, even its power can be raised to 3 (as it is in *Irmay's* formula) expanding into series the logarithmic member of Eq. 41. The close numerical similarity with *Averjanov's* formula shown in Fig. 7. can be explained by the further members of the equation.

The previous deduction gives the fundamental theoretical basis of Eq. 28. It is necessary, however, to emphasize, that the factor of proportionality belongs to  $k_L$  and not  $k_D$ , and the correct form of the reduced coefficient of permeability is

$$k_H = k_L \left( \frac{s-s_0}{1-s_0} \right)^3 = k_D (1-s_0)^2 \left( \frac{s-s_0}{1-s_0} \right)^3. \quad 42.$$

The relationship between velocity and hydraulic gradient can be represented also with a straight line, the slope of which is proportional to  $k_L \left( \frac{s-s_0}{1-s_0} \right)^3$  and depends consequently on the actual and minimum saturation apart from *Darcy's* permeability coefficient.

The most important difference between the use of methods for calculating the hydraulic data characterizing seepage in saturated or unsaturated soil is caused by the dissimilarity of hydraulic gradients. After combining Eqs. 29 and 42. the final form of the mean velocity in unsaturated layer can be given as follows:

$$v_H = \frac{d}{dx} \left( h + \frac{\psi}{\gamma} \right) k_D (1-s_0)^2 \left( \frac{s-s_0}{1-s_0} \right)^3. \quad 43.$$

According to this equation the gradient is also a function of saturation, and changes along the flow line. Its value cannot be taken into consideration as a constant calculated from the known boundary conditions at the two edges of the layer, but its relation with the saturation must be investigated. This relationship can be expressed by using the previously presented function between tension and water content (Kovács, 1958/b):

$$\psi^{1/6} = (1-n) \frac{A}{W} = \frac{1-n}{n} \frac{A}{s}; \quad 44.$$

$$\psi = \frac{A_0}{s^6}.$$

The value  $h$ , which is proportional to the gravitational potential, can also be contacted with the  $x$  ordinate measured along the flow line from the chosen origo. When the flow line is a straight one

$$h = cx; \quad \text{where} \quad -1 < c < 1. \quad 45.$$

In this equation  $c$  may have some special value:  $c=1$  in the case of a vertical movement downwards,  $c=0$  if the flow is horizontal, and if the water is moving upwards vertically  $c=-1$ .

Although numerous approximations had to be applied already, Eq. 43. can not be integrated in closed form, only in that case, when the flow is horizontal and the hydraulic potential is independent of gravity:

$$v_H = \frac{d\psi}{ds} \frac{ds}{dx} \frac{k_D}{\gamma} (1-s_0)^2 \left( \frac{s-s_0}{1-s_0} \right)^3 = -6A_0 \frac{k_D}{\gamma} (1-s_0)^2 \left( \frac{s-s_0}{1-s_0} \right)^3 \frac{1}{s^7} \frac{ds}{dx}. \quad 46.$$

From this relationship, after separating the differential variables, integrating the equation and taking the boundary conditions into consideration at the two ends of the investigated flow system (where  $x=0$ , there  $\psi=\psi_1$  and  $s=s_1$ ; where  $x=L$ , there  $\psi=\psi_2$  and  $s=s_2$ ) the distribution of the water content along the flow line can be calculated

$$x=L \frac{\psi \left( \frac{s-s_0}{1-s_0} \right)^3 (s-0,75s_0)^2 s - \psi_1 \left( \frac{s_1-s_0}{1-s_0} \right)^3 (s_1-0,75s_0)^2 s_1}{\psi_2 \left( \frac{s_2-s_0}{1-s_0} \right)^3 (s_2-0,75s_0)^2 s_2 - \psi_1 \left( \frac{s_1-s_0}{1-s_0} \right)^3 (s_1-0,75s_0)^2 s_1}; \quad 47.$$

and similarly the mean seepage velocity

$$v_H = \frac{k_D}{\gamma L} (1-s_0)^2 \left[ \psi_2 \left( \frac{s_2-s_0}{1-s_0} \right)^3 (s_2-0,75s_0)^2 s_2 - \psi_1 \left( \frac{s_1-s_0}{1-s_0} \right)^3 (s_1-0,75s_0)^2 s_1 \right]. \quad 48.$$

In most practical cases vertical movements have to be investigated through the upper unsaturated zone of the soil e.g. infiltration to the groundwater ( $c=+1$ ) or recharge of rootzone from the groundwater ( $c=-1$ ). Substituting these constants into Eq. 43. (or any other value of  $c$ ) the integration can be solved only numerically with successive iteration. This very extensive calculation calls for the use of a computer. Before the preparation of the suitable programme it appears necessary to check Eqs. 47. and 48. with a horizontal model and see whether the actual physical process was followed correctly with the applied approximations or not. This experimental check will be the next step of the investigation.

## Analytical solution to seepage problem from a soil channel with a curvilinear bottom

Bhagu R. Chahar

Department of Civil Engineering, Indian Institute of Technology Delhi, New Delhi, India

Received 25 March 2005; revised 28 September 2005; accepted 13 October 2005; published 14 January 2006.

[1] An exact analytical solution for the quantity of seepage from a semicircular channel is not available because of difficulties in the conformal mapping. In the present study an inverse method has been used to obtain an exact solution for seepage from a curved channel whose boundary maps along a circle onto the hodograph plane. The solution involves inverse hodograph and Schwarz-Christoffel transformation. The solution also includes a set of parametric equations for the shape of the channel perimeter and loci of phreatic lines. The channel shape is an approximate semiellipse with the top width as the major axis and twice the water depth as the minor axis and vice versa. The average of the corresponding ellipse and parabola gives nearly the exact shape of the channel. Also, this channel is non-self-intersecting and is feasible from a very deep channel to a very wide channel, unlike Kozeny's trochoid shape, which is self-intersecting for a top width to depth ratio less than 1.14. Its seepage function is a linear combination of seepage functions for a slit and a strip. However, this channel allows more seepage loss than a trochoid channel. A special case of the resulting channel is an approximate semicircular section.

**Citation:** Chahar, B. R. (2006), Analytical solution to seepage problem from a soil channel with a curvilinear bottom, *Water Resour. Res.*, 42, W01403, doi:10.1029/2005WR004140.

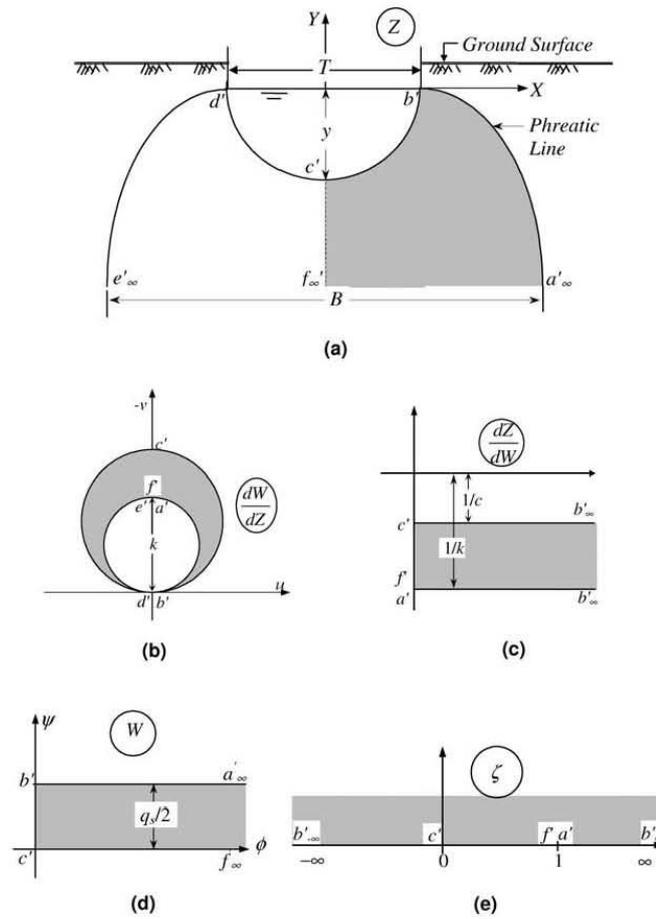
### 1. Introduction

[2] Study of seepage from curved channels is important because of its applications in areas of irrigation engineering, hydrology, reservoir management, and groundwater recharge. A semicircular channel is the most hydraulically efficient section and hence is also the most economical section as it has the least cross-sectional area and wetted perimeter [Chow, 1973]. J. Kozeny [Harr, 1962; Polubarinova-Kochina, 1962; Muskat, 1982] investigated seepage from a curved channel using Zhukovsky's function and found that the resultant channel has trochoid shape. Anakhaev [2004] obtained a solution for curvilinear watercourses by representing the watercourse profiles in the Zhukovsky plane by means of the equation of a family of lemniscates and by using the conformal mapping and showed that a special case reduces to Kozeny's trochoid shape. Hunt [1972] presented an approximate solution for seepage from a shallow channel of an arbitrary cross section. N. N. Verigin [Kovacs, 1981; Aravin and Numerov, 1965] analytically found an approximate solution for a circular section in terms of a rapidly converging series. Kacimov [2003] pointed out the mistake in Verigin's solution. Ilyinskii and Kacimov [1984] found the optimal shape of a curved irrigation channel from the point of view of minimum seepage loss using the inverse boundary value problem method. Furthermore, Kacimov and Obnosov [2002] used the inverse method along with hodograph and conformal mapping to find the shape of a soil channel of constant hydraulic gradient. Swamee and Kashyap [2001] obtained seepage from nonpolygon canals, including

circular canals using the finite difference method; however, there are some drawbacks in their solution, as highlighted by Kacimov [2003]. Approximate solutions to find the quantity of seepage from canals by numerical (finite difference, finite element, boundary integral, etc.) methods [Remson et al., 1971; Huyakorn and Pinder, 1983; Liggett and Liu, 1983] have gained importance because of easy availability of high-speed digital computers along with specialized software. These methods can be used to quantify the seepage from curved channels. However, numerical methods result only in a numerical value as a problem-specific solution. Therefore generalized solutions in the functional form are not possible through numerical methods. An exact analytical solution for a semicircular channel is not achievable since its geometry maps in curvilinear shapes onto hodograph and inverse hodograph planes, for which Schwarz-Christoffel transformation is impossible. One possible way out is an inverse method where the shape of the unknown channel is searched as part of a solution [Ilyinskii and Kacimov, 1984; Kacimov and Obnosov, 2002]. Using the inverse method, an exact solution for seepage from a curved channel whose boundary maps along a circle onto the hodograph plane is presented. A special case of the resulting channel has been compared with a semicircular shape.

### 2. Analytical Solution

[3] The pattern of seepage from a curvilinear-bottomed symmetrical channel of top width  $T$  (m) and water depth  $y$  (m) in a homogeneous and isotropic porous medium of infinite extent is shown in Figure 1a. The effects of capillarity, infiltration, and evaporation are ignored. It is also assumed that the flow is steady and satisfies Darcy's



**Figure 1.** Seepage from a curvilinear-bottomed channel. (a) Physical plane, (b) hodograph plane, (c) inverse hodograph plane, (d) complex potential plane, and (e) auxiliary plane.

law. In view of the significant length of the channel the seepage flow can be considered two-dimensional in the vertical plane. Because of vertical symmetry the solution for the half domain ( $a'b'c'f'a'$ ) is sought. The complex potential is defined as  $W = \phi + i\psi$ , where  $\phi$  is the velocity potential ( $m^2/s$ ), which is equal to hydraulic conductivity  $k$  ( $m/s$ ) times the head  $h$  ( $m$ ), and  $\psi$  is the stream function ( $m^2/s$ ), which is constant along streamlines. If the physical plane is defined as  $Z = X + iY$ , then Darcy's law yields  $u = \partial\phi/\partial X = -k(\partial h/\partial X)$  and  $v = \partial\phi/\partial Y = -k(\partial h/\partial Y)$ , where  $u$  and  $v$  are velocity or specific discharge vectors in  $X$  and  $Y$  directions, respectively. In the velocity hodograph plane ( $dW/dZ = u - iv$ ) the phreatic line  $a'b'$  will map along a circle of radius  $k$  with the center at  $(0, k/2)$ . Since  $a'$  lies at a very large depth, the hydraulic gradient is unity, and the seepage velocity becomes  $k$  in the vertically downward direction. The channel boundary  $b'c'd'$  is an equipotential line, so the seepage velocity is normal to the boundary, and in the hodograph plane it will map a curvilinear path. However, the exact

shape of the curve is not known. It is assumed that the channel boundary maps along a circle of diameter  $c$  in the hodograph plane.

[4] The inverse hodograph  $dZ/dW$  (Figure 1c) and the complex potential  $W$  (Figure 1d) for half of the physical flow domain have been drawn following the standard steps [Strack, 1989; Strack and Asgian, 1978]. The  $dZ/dW$  plane and  $W$  plane have been mapped onto the upper half of an auxiliary ( $\text{Im } \zeta > 0$ ) plane (Figure 1e) using the Schwarz-Christoffel conformal transformation [Harr, 1962; Polubarinova-Kochina, 1962].

[5] Mapping the  $W$  plane onto the  $\zeta$  plane results in (for details of the mapping steps, refer to Appendix A or Chahar [2005])

$$W = \frac{q_s}{2\pi} \int_0^\zeta \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t}} = \frac{q_s}{2\pi} \ln \left| \frac{\sqrt{\zeta}-1}{\sqrt{\zeta}+1} \right|, \quad (1)$$

where  $q_s$  is the quantity of seepage loss from unit length of channel ( $m^2/s$ ) and  $t$  is a dummy variable. Taking the derivative of equation (1),

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{q_s}{2\pi(1-\zeta)\sqrt{\zeta}}. \quad (2)$$

Similarly, mapping the  $dZ/dW$  plane onto the  $\zeta$  plane results in

$$\frac{dZ}{dW} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \int_0^{\zeta} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} - \frac{i}{c}. \quad (3)$$

Equation (3) acquires a different form (see Appendix A) in the different regions  $c'f'd'$  ( $0 \leq \zeta \leq 1$ ),  $a'b'$  ( $1 \leq \zeta < \infty$ ), and  $c'b'$  ( $-\infty < \zeta \leq 0$ ). Multiplying equations (2) and (3) and then integrating yields

$$Z = \frac{q_s}{2\pi^2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \int_0^{\zeta} \left( \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(\tau-1)}} \right) \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} - \frac{iq_s}{2\pi c} \int_0^{\zeta} \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} - iy, \quad (4)$$

where  $\tau$  is a dummy variable. Along the channel perimeter  $c'b'$  ( $-\infty < \zeta \leq 0$ ),

$$Z = \frac{q_s}{\pi c} \tan^{-1} \sqrt{-\zeta} - i \left( y - \frac{2q_s}{\pi^2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \int_0^{\sinh^{-1} \sqrt{-\zeta}} \frac{\tau d\tau}{\cosh \tau} \right). \quad (5)$$

Separating real and imaginary parts at point  $b'$  ( $\zeta = -\infty$ ;  $Z = T/2$ ),

$$T = \frac{q_s}{c} \quad (6)$$

$$y = \frac{2q_s}{\pi^2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) 2G, \quad (7)$$

where  $G = 0.915965594\dots =$  Catalan's constant. Combining equations (5), (6), and (7),

$$\frac{Y}{y} = \frac{1}{2G} \left( \int_0^{\sinh^{-1} \tan(\pi X/T)} \frac{\tau d\tau}{\cosh \tau} - 2G \right), \quad (8)$$

which defines the shape of the channel perimeter in Cartesian coordinates. Furthermore, combining equations (4), (6), and (7) in the phreatic line region  $a'b'$  ( $1 \leq \zeta < \infty$ ),

$$Z = \frac{T}{2} + \frac{y}{2G} \int_{\cosh^{-1} \sqrt{\zeta}}^{\infty} \frac{\tau d\tau}{\sinh \tau} + i \left( T + \frac{\pi^2}{4G} y \right) \ln \tanh \left( \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\zeta}}{2} \right). \quad (9)$$

Therefore the parametric equations for the phreatic line are

$$X = \frac{T}{2} + \frac{y}{2G} \int_{\cosh^{-1} \sqrt{\zeta}}^{\infty} \frac{\tau d\tau}{\sinh \tau} \quad (10a)$$

$$Y = \left( T + \frac{\pi^2}{4G} y \right) \ln \tanh \left( \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\zeta}}{2} \right). \quad (10b)$$

The integrals in equations (8) and (10a) involving hyperbolic cosine and sine functions can be expressed as infinite series expansions (Appendix A) or evaluated numerically. The phreatic line has a vertical asymptote at  $Y = -i\infty$ , i.e., at the point  $a'$  ( $\zeta = 1$ ), given by

$$X = \frac{T}{2} + \frac{\pi^2 y}{8G}. \quad (11)$$

Hence the width of seepage flow at infinite depth  $B$  (m) comes out

$$B = 2X_{\infty} = T + \frac{\pi^2}{4G} y. \quad (12)$$

[6] The distribution of the velocity of seeping water normal to the channel perimeter can be found by using equation (3) along  $c'b'$  ( $-\infty < \zeta \leq 0$ ) as

$$\frac{dZ}{dW} = \frac{1}{u-iv} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \sinh^{-1} \sqrt{-\zeta} - \frac{i}{c}. \quad (13)$$

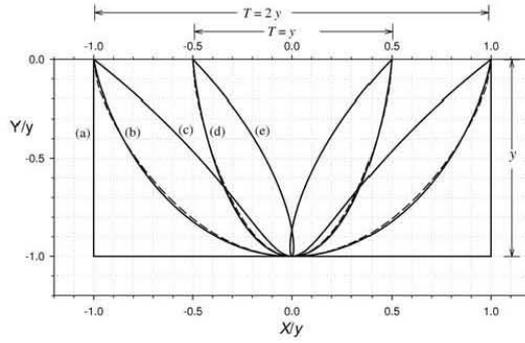
Substituting the values of  $c$  and  $\zeta$  and then manipulating,

$$V = \frac{k(T/y + \pi^2/4G)}{\sqrt{((\pi \sinh^{-1} \tan(\pi X/T))/2G)^2 + (T/y)^2}}. \quad (14)$$

## 2.1. Quantity of Seepage

[7] The steady seepage loss from a channel in the hydro-geological conditions of Figure 1a can be expressed as

$$q_s = k(T + Ay) = kB = kyF_s, \quad (15)$$



**Figure 2.** Comparison of seepage loss with other channel shapes. Rectangular channel with  $T/y = 2$  (labeled a), curvilinear-bottomed channel (solid curve) and average of parabolic and elliptical shape (dashed curve) for  $T/y = 2$  (labeled b), trochoid channel with  $T/y = 2$  (labeled c), curvilinear-bottomed channel (solid curve) and average of parabolic and elliptical shape (dashed curve) for  $T/y = 1$  (labeled d), and self-intersecting Trochoid at  $T/y = 1$  (labeled e).

where  $A$  is Vedernikov's parameter [Harr, 1962] and  $F_s$  is the seepage function [Chahar, 2000; Swamee et al., 2000, 2001b], which is a dimensionless function of channel geometry and boundary condition. Using the value of  $c$  from equation (6) in equation (7),

$$q_s = k \left( \frac{\pi^2}{4G} y + T \right) = ky \left( \frac{\pi^2}{4G} + \frac{T}{y} \right). \quad (16)$$

Therefore Vedernikov's parameter and seepage function for this channel are

$$A = \frac{\pi^2}{4G} \approx \pi(4 - \pi) \approx 2.69676 \quad (17a)$$

$$F_s = \frac{\pi^2}{4G} + \frac{T}{y}, \quad (17b)$$

respectively. It is interesting to note that the Vedernikov's parameter is identical to that of a slit [Chahar, 2001]. Furthermore, equations (6) and (7) at  $c = 2k$  yield

$$q_s = 2kT = \frac{\pi^2}{2G} ky. \quad (17c)$$

Therefore

$$\frac{T}{y} = \frac{\pi^2}{4G}. \quad (17d)$$

The quantity of seepage given by equation (17c) is the minimum for a fixed area of the channel [Chahar, 2005]. Thus the top width to depth ratio equal to  $\pi^2/4G$  results in a minimum seepage loss channel section. Ilyinskii and Kacimov [1984] also got a result identical to equation (17c) for their  $q_s$  optimal channel. Therefore a particular case ( $c = 2k$ ) of the present channel is the optimal channel studied by Ilyinskii and Kacimov [1984]. Furthermore, equation (16) gives  $q_s = ky\pi^2/4G$  for a slit (a very narrow and deep channel, i.e.,  $T/y \rightarrow 0$ ) and  $q_s = kT$  for a strip (a very wide and shallow channel, i.e.,  $T/y \rightarrow \infty$ ). Comparison of seepage loss from an optimal section given by equation (17c) with those from slit and strip sections shows (1) that the seepage loss from the minimum seepage loss section is twice that from the same top width strip section or the same depth slit section and (2) that for the same quantity of seepage the top width of a strip section is twice the top width of the corresponding minimum seepage loss section or the water depth in a slit section is twice that of the corresponding minimum seepage loss section. This halving feature of optimal sections, as compared with geometrically degenerated shapes (slit and strip), was also confirmed by Kacimov [2001, and references therein] for channels, drains, electrical condensers, and dams.

[8] As per the comparison theorem [Kacimov, 2003] the value of  $q_s$  for any arbitrary channel is bounded from below and above by the following inequality:

$$q_i < q_s < q_c, \quad (18)$$

where  $q_i$  and  $q_c$  are seepage discharges from an arbitrary inscribed channel and an arbitrary comprising channel, respectively. A rectangular channel is selected as a comprising channel, and a Kozeny's trochoid channel is selected as an inscribed channel (see Figure 2). The shape of the present channel perimeter involving a hyperbolic cosine integral is evaluated through numerical integration using MATLAB. All three channels have the same  $y$  and  $T$  but differ in their shape such that a monotonic deformation from one shape to another gives a monotonic increase of the seepage losses according to equation (18). The shape of the Kozeny's trochoid can be given by the following parametric equations [Muskat, 1982]:

$$Y = y \cos(\pi\psi/q_i) \quad (19a)$$

$$X + \psi/k = y \sin(\pi\psi/q_i), \quad (19b)$$

where the quantity of seepage  $q_i$  is given by

$$q_i = ky(2 + T/y), \quad (19c)$$

so the Vedernikov's parameter for the trochoid channel is equal to 2. The main limitation of a trochoid channel is that it cannot be too deep. From equations (19a) and (19b),

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\sin(\pi\psi/q_i)}{\cos(\pi\psi/q_i) - q_i/\pi ky} = \frac{\sqrt{y^2 - Y^2}}{Y - q_i/\pi k}. \quad (20)$$

**Table 1.** Characteristics of the Present Curvilinear-Bottomed Channel

Approximate Semicircular ( $T/y = 2$ )				General Case ( $T/y = 3$ )				
$\pm X/y$	Approximate Radius	Percent Error	$V/k$	$Y/y$				
				$\pm X/y$	Present Channel	Parabolic Shape	Elliptical Shape	Average of (7) and (8)
0.00	1.0000	0.0000	2.3469	0.00	-1.0000	-1.0000	-1.0000	-1.0000
0.06	0.9994	-0.0623	2.3392	0.09	-0.9976	-0.9964	-0.9982	-0.9973
0.10	0.9983	-0.1727	2.3257	0.15	-0.9933	-0.9900	-0.9950	-0.9925
0.16	0.9956	-0.4391	2.2931	0.24	-0.9827	-0.9744	-0.9871	-0.9808
0.20	0.9932	-0.6817	2.2635	0.30	-0.9728	-0.9600	-0.9798	-0.9699
0.26	0.9886	-1.1374	2.2079	0.39	-0.9538	-0.9324	-0.9656	-0.9490
0.30	0.9850	-1.4979	2.1639	0.45	-0.9382	-0.9100	-0.9539	-0.9320
0.36	0.9789	-2.1134	2.0881	0.54	-0.9103	-0.8704	-0.9330	-0.9017
0.40	0.9743	-2.5659	2.0317	0.60	-0.8884	-0.8400	-0.9165	-0.8783
0.46	0.9671	-3.2905	1.9391	0.69	-0.8507	-0.7884	-0.8879	-0.8382
0.50	0.9621	-3.7915	1.8723	0.75	-0.8220	-0.7500	-0.8660	-0.8080
0.56	0.9546	-4.5417	1.7654	0.84	-0.7731	-0.6864	-0.8285	-0.7574
0.60	0.9498	-5.0198	1.6897	0.90	-0.7363	-0.6400	-0.8000	-0.7200
0.66	0.9434	-5.6571	1.5697	0.99	-0.6741	-0.5644	-0.7513	-0.6578
0.70	0.9401	-5.9929	1.4853	1.05	-0.6275	-0.5100	-0.7141	-0.6121
0.76	0.9372	-6.2819	1.3509	1.14	-0.5484	-0.4224	-0.6499	-0.5362
0.80	0.9373	-6.2673	1.2551	1.20	-0.4884	-0.3600	-0.6000	-0.4800
0.86	0.9422	-5.7796	1.0978	1.29	-0.3849	-0.2604	-0.5103	-0.3853
0.90	0.9499	-5.0097	0.9786	1.35	-0.3038	-0.1900	-0.4359	-0.3129
0.96	0.9721	-2.7887	0.7496	1.44	-0.1530	-0.0784	-0.2800	-0.1792
1.00	1.0000	0.0000	0.0719	1.50	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

At the central point,  $Y = y$ , so  $dY/dX = 0$  except when the denominator is zero. In that case,  $dY/dX$  is indeterminate, and the trochoid becomes self-intersecting and loses its usefulness. At this limiting case,

$$y = \frac{q_i}{\pi k} = \frac{T + 2y}{\pi} \Rightarrow T = (\pi - 2)y. \quad (21)$$

For a practical application of a trochoid shape,  $T/y$  must be greater than  $\pi - 2$ . So there is a typo in *Kacimov's* [2003] note for this inequality. Similarly, the channel of constant hydraulic gradient investigated by *Kacimov and Obnosov* [2002] becomes self-intersecting at larger depths ( $c \geq 0.5k$ ). Figure 2 also compares the investigated curved channel and a self-intersecting case of a trochoid for  $T/y = 1$ . The present curved channel does not have such a limitation at any  $y$  and  $T$ .

[9] Making use of *Morel-Seytoux's* [1964] exact solution for the seepage from a rectangular channel, *Chahar* [2000] and *Swamee et al.* [2000] obtained closely approximate explicit expression for the seepage function, while *Chahar* [2001] presented the solution for *Vedemikov's* parameter in graphical form. Using these results, it can be verified that the following inequality is always true for any set of  $y$  and  $T$ :

$$2 + \frac{T}{y} < \frac{\pi^2}{4G} + \frac{T}{y} < \left( (\pi^2/4G)^{0.77} + (T/y)^{0.77} \right)^{1.3}. \quad (22)$$

## 2.2. Salient Features

[10] The curved channel described by equation (8) possesses many interesting properties. It approximately represents a semiellipse with major and minor axes equal to  $T$  and  $2y$ , respectively, and vice versa. Actually, it always lies between the semiellipse and a parabola (inscribed in a rectangle with sides  $T$  and  $y$ ), and any of its coordinates is

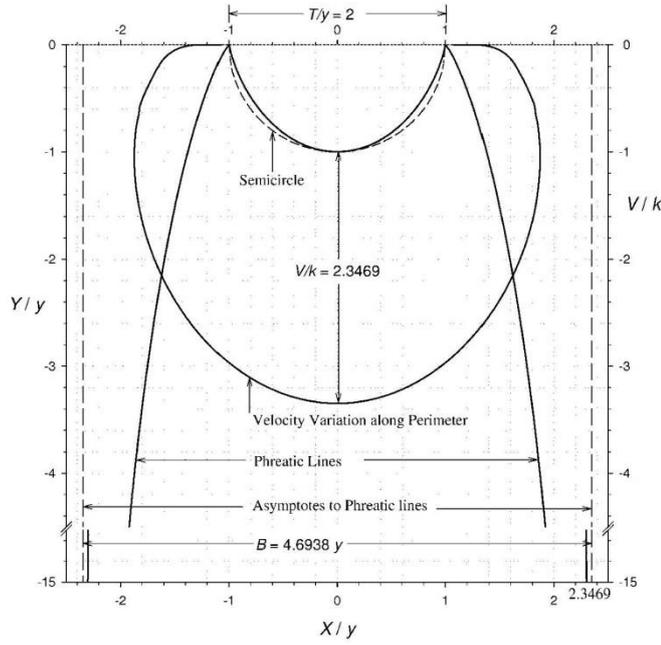
almost exactly the average of the coordinates of the corresponding ellipse and parabola (see Figure 2 for  $T/y = 2$  and  $T/y = 1$ , and see Table 1 for  $T/y = 3$ ). This channel is non-self-intersecting and hence is feasible from  $T/y \rightarrow 0$  (slit) to  $T/y \rightarrow \infty$  (strip). In fact this is the basic shape of the channel, and it highlights the importance of expressing seepage loss in terms of seepage function. It can be noted from equation (17b) that the seepage function is a linear combination of seepage functions for a slit ( $\pi^2/4G$ ) and a strip ( $T/y$ ), respectively [*Chahar*, 2000; *Swamee et al.*, 2001a]. On the other hand, the seepage functions for other channels are power combination of  $\pi^2/4G$  and  $T/y$ . For example, the power is 1.3 for an inscribing triangular channel and 0.77 for a comprising rectangular channel [*Chahar*, 2000; *Swamee et al.*, 2000], whereas it is in between these limits for other feasible channels for same  $T/y$ .

[11] A semicircle is a special case of a semiellipse, and consequently, by adopting  $T/y = 2$  the curved channel can be approximated into a semicircular channel. Figure 3 shows a comparison with a semicircular channel. Both the channels closely match each other; the maximum error is 6.3% (Table 1). Taking  $T/y = 2$  in equation (14),

$$\frac{V}{k} = \frac{(1 + \pi^2/8G)}{\sqrt{((\pi \sinh^{-1} \tan(\pi X/T))/4G)^2 + 1}}. \quad (23)$$

This variation in the velocity of seeping water normal to the channel perimeter is plotted in Figure 3. The maximum velocity at the deepest point ( $X/T = 0$ ) of the channel perimeter is

$$\frac{V}{k} = 1 + \frac{\pi^2}{8G} = 2.3469. \quad (24)$$



**Figure 3.** Variation in seepage velocity and location of phreatic line for an approximate semicircular channel (curvilinear-bottomed channel with  $T/y = 2$ ).

Figure 3 also plots the phreatic lines by using  $T/y = 2$  in equations (10a) and (10b). For an approximate semicircular channel the vertical asymptote of the phreatic line, the width of the flow at infinity, and the quantity of seepage reduce to

$$\frac{X}{y} = \frac{T}{2y} + \frac{\pi^2}{8G} = 2.3469, \quad (25a)$$

$$B = y \left( \frac{T}{y} + \frac{\pi^2}{4G} \right) = 4.6938y, \quad (25b)$$

$$q_s = 4.6938ky, \quad (25c)$$

respectively.

### 3. Conclusions

[12] An exact analytical solution for the quantity of seepage from a curved channel whose boundary maps along a circle onto the hodograph plane can be obtained using an inverse method along with inverse hodograph and Schwarz-Christoffel transformation. The shape of the channel is an approximate semiellipse. Nearly the exact shape of the channel can be obtained by averaging the corresponding ellipse and parabola. Unlike Kozeny's trochoid shape and the constant gradient channel of Kacimov and Obnosov this channel is non-self-intersecting at greater depths and hence is feasible from a very narrow and deep channel (slit) to a very wide and shallow channel (strip). Indeed, this is the basic shape of the channel, and its seepage function is a linear combination of seepage functions for a slit and a strip. Also, Vedernikov's parameter for the present channel is the

same as that for a slit. Moreover, the quantity of seepage from this channel is always greater than a feasible trochoid channel of the same top width to depth ratio. A particular case of this curved channel is close to a semicircular section.

### Appendix A: Details of the Mapping Steps

#### A1. Mapping of a Complex Potential Plane

[13] Mapping the  $W$  plane onto the  $\zeta$  plane results in

$$W = C_1 \int_0^\zeta \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t}} + C_2, \quad (A1)$$

where  $C_1$  and  $C_2$  are constants. The branch of  $\sqrt{t}$  is selected which is positive at  $t > 0$ . The constants can be found by using values of  $W$  and  $\zeta$  at two points in the  $W$  plane and the  $\zeta$  plane. Using the values at point  $c'$  ( $\zeta = 0, W = 0$ ) in equation (A1),

$$C_2 = 0 \quad (A2a)$$

at point  $b'$  ( $\zeta = -\infty, W = iq_s/2$ ), so

$$\begin{aligned} \frac{iq_s}{2} &= C_1 \int_0^{-\infty} \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t}} = C_1 \int_0^{-\infty} \frac{-idt}{(1-t)\sqrt{-t}} \\ &= iC_1 \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{(1+\tau)\sqrt{\tau}} = iC_1\pi, \end{aligned} \quad (A2b)$$

and hence

$$C_1 = q_s/2\pi. \quad (\text{A2c})$$

Substitution of  $C_1$  and  $C_2$  leads to equation (1). Along the center line  $c'f'$  ( $0 \leq \zeta \leq 1$ ) the mapping of equation (1) modifies to

$$W = -\frac{q_s}{2\pi} \ln\left(\frac{1-\sqrt{\zeta}}{1+\sqrt{\zeta}}\right). \quad (\text{A3a})$$

In an infinite porous medium both points  $f'$  and  $a'$  are at infinity in the  $Z$  plane as well as in the  $W$  plane, and they map at  $\zeta = 1$  in the  $\zeta$  plane. When the point  $\zeta = 1$  is crossed (i.e.,  $a'$  is approached from  $f'$ ) in the  $\zeta$  plane, there is a jump of  $q_s/2$  in the  $W$  plane mapping. So the mapping for  $a'b'$  ( $1 \leq \zeta < \infty$ ) becomes

$$\begin{aligned} W &= \frac{q_s}{2\pi} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} + \frac{iq_s}{2} + \frac{q_s}{2\pi} \int_1^\zeta \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t}} \\ &= \frac{q_s}{\pi} \left( \frac{i\pi}{2} - \ln \tan\left(\frac{\sec^{-1}\sqrt{\zeta}}{2}\right) \right). \end{aligned} \quad (\text{A3b})$$

For  $b'c'$  ( $-\infty < \zeta \leq 0$ ) the corresponding mapping is

$$W = \frac{q_s}{2\pi} \int_0^\zeta \frac{dt}{(t-1)\sqrt{t}} = \frac{iq_s}{2\pi} \int_\zeta^0 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{-t}} = \frac{iq_s}{\pi} \tan^{-1} \sqrt{-\zeta}. \quad (\text{A3c})$$

## A2. Mapping of the Inverse Hodograph Plane

[14] Mapping of the  $dZ/dW$  plane onto the  $\zeta$  plane results in

$$\frac{dZ}{dW} = C_3 \int_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} + C_4, \quad (\text{A4a})$$

where  $C_3$  and  $C_4$  are constants. The branch of  $\sqrt{t}$  is selected which is positive at  $t > 0$  while  $\sqrt{t-1}$  is positive at  $t > 1$ . Using the values at point  $c'$  ( $\zeta = 0$ ,  $dZ/dW = -i/c$ ),

$$\frac{-i}{c} = C_4. \quad (\text{A4b})$$

At point  $a'$  ( $\zeta = 1$ ,  $dZ/dW = -i/k$ ),

$$\begin{aligned} \frac{-i}{k} &= C_3 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} - \frac{i}{c} = -iC_3 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} - \frac{i}{c} \\ &= -iC_3\pi - \frac{i}{c}; \end{aligned} \quad (\text{A4c})$$

therefore

$$C_3 = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right). \quad (\text{A4d})$$

Substituting the values of  $C_3$  and  $C_4$  in equation (A4a) gives equation (3). Along  $c'f'a'$  ( $0 \leq \zeta \leq 1$ ) the mapping of equation (3) becomes

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dW} &= \frac{-i}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \int_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} - \frac{i}{c} \\ &= -i \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \sin^{-1} \sqrt{\zeta} - \frac{i}{c}. \end{aligned} \quad (\text{A5a})$$

For the segment  $a'b'$  ( $1 \leq \zeta < \infty$ ) the  $dZ/dW$  mapping is

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dW} &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \left( \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} + \int_1^\zeta \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} \right) - \frac{i}{c} \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \int_1^\zeta \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} - \frac{i}{k} \end{aligned} \quad (\text{A5b})$$

so that

$$\frac{dZ}{dW} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \cosh^{-1} \sqrt{\zeta} - \frac{i}{k}. \quad (\text{A5c})$$

Finally, the mapping for  $c'b'$  ( $-\infty < \zeta \leq 0$ ) can be obtained as

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dW} &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \int_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt{-t(1-t)}} - \frac{i}{c} \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \sinh^{-1} \sqrt{-\zeta} - \frac{i}{c}. \end{aligned} \quad (\text{A5d})$$

## A3. Mapping of the Physical Plane

[15] Since

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \frac{dZ}{dW} \frac{dW}{d\zeta}, \quad (\text{A6})$$

using equations (2) and (3),

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \left( \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \int_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} - \frac{i}{c} \right) \frac{q_s}{2\pi(1-\zeta)\sqrt{\zeta}}. \quad (\text{A7})$$

Integrating equation (A7),

$$Z = \int_0^\zeta \left( \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(\tau-1)}} - \frac{i}{c} \right) \frac{q_s}{2\pi(1-t)\sqrt{t}} dt + C_5. \quad (\text{A8a})$$

Using the point  $c'$  ( $\zeta = 0$ ,  $Z = -iy$ ),  $C_5 = -iy$ , so

$$Z = \int_0^\zeta \left( \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(\tau-1)}} - \frac{i}{c} \right) \frac{q_s}{2\pi(1-t)\sqrt{t}} dt - iy, \quad (\text{A8b})$$

which, after manipulation, gives equation (4). For  $c'b'$  or  $(-\infty < \zeta \leq 0)$ ,

$$Z = \frac{q_s}{2\pi^2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \int_0^\zeta \left( \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau(1-\tau)}} \right) \cdot \frac{dt}{(1-t)i\sqrt{-t}} - \frac{iq_s}{2\pi c} \int_0^\zeta \frac{dt}{(1-t)i\sqrt{-t}} - iy. \tag{A9a}$$

Letting  $-t = \tan^2 \theta$ ,

$$\int_0^\zeta \frac{dt}{(1-t)\sqrt{-t}} = -2 \tan^{-1} \sqrt{-\zeta} \tag{A9b}$$

and letting  $-\tau = \sinh^2 \theta$ ,

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau(1-\tau)}} = -2 \sinh^{-1} \sqrt{-t}, \tag{A9c}$$

so equation (A9a) converts to

$$Z = \frac{q_s}{\pi c} \tan^{-1} \sqrt{-\zeta} - i \left( y - \frac{q_s}{2\pi^2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \int_0^\zeta \frac{\sinh^{-1} \sqrt{-tdt}}{(1-t)\sqrt{-t}} \right). \tag{A9d}$$

Furthermore, letting  $-t = \sinh^2 \tau$ ,

$$\int_0^\zeta \frac{\sinh^{-1} \sqrt{-tdt}}{(1-t)\sqrt{-t}} = \int_0^{\sinh^{-1} \sqrt{-\zeta}} \frac{\tau d\tau}{\cosh \tau}, \tag{A9e}$$

resulting in equation (5). In general,

$$\int \frac{\tau d\tau}{\cosh \tau} = \frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^4}{8} + \frac{5\tau^6}{144} - \dots + \frac{(-1)^n E_n \tau^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \dots, \tag{A9f}$$

where  $E_n = n$ th Euler number, while

$$\int_0^\infty \frac{\tau d\tau}{\cosh \tau} = 2G. \tag{A9g}$$

At point  $b'$  ( $\zeta = -\infty, Z = T/2$ ),

$$\frac{T}{2} = \frac{q_s}{\pi c} \tan^{-1} \infty - i \left( y - \frac{2q_s}{\pi^2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \int_0^\infty \frac{\tau d\tau}{\cosh \tau} \right). \tag{A10a}$$

Equating real and imaginary parts,

$$T = \frac{q_s}{c}$$

$$c = \frac{q_s}{T} \tag{A10b}$$

and

$$y = \frac{2q}{\pi^2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) 2G$$

or

$$\left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) = \frac{\pi^2 y}{4G q_s} \tag{A10c}$$

Solving Equations (A10b) and (A10c) simultaneously,

$$q_s = k \left( T + \frac{\pi^2 y}{4G} \right) \tag{A10d}$$

$$c = \frac{k}{T} \left( T + \frac{\pi^2 y}{4G} \right). \tag{A10e}$$

**A4. Position of the Phreatic Line**

[16] The equation of phreatic line  $a'b'$  ( $1 \leq \zeta < \infty$ ) is given by

$$Z = \int_0^\zeta \left( \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \cosh^{-1} \sqrt{t} - \frac{i}{k} \right) \frac{q_s}{2\pi(1-t)\sqrt{t}} dt + \frac{T}{2}, \tag{A11a}$$

which can be rewritten as

$$Z = \frac{q_s}{\pi^2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \int_0^\zeta \frac{\cosh^{-1} \sqrt{t}}{(1-t)\sqrt{t}} dt - \frac{iq_s}{2\pi k} \int_0^\zeta \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} + \frac{T}{2}. \tag{A11b}$$

Letting  $t = \cosh^2 \tau$ , the first integral is

$$\int_0^\zeta \frac{\cosh^{-1} \sqrt{t}}{(1-t)\sqrt{t}} dt = 2 \int_{\cosh^{-1} \sqrt{\zeta}}^\infty \frac{\tau d\tau}{\sinh \tau} \tag{A11c}$$

and the second integral is

$$\int_0^\zeta \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} = -2 \ln \tanh \left( \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\zeta}}{2} \right); \tag{A11d}$$

subsequently, equation (A11b) converts into

$$Z = \frac{T}{2} + \frac{2q_s}{\pi^2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{c} \right) \int_{\cosh^{-1} \sqrt{\zeta}}^\infty \frac{\tau d\tau}{\sinh \tau} + \frac{iq_s}{\pi k} \ln \tanh \left( \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\zeta}}{2} \right). \tag{A11e}$$

Substituting values of  $q_s$  and  $c$  yields equation (9). At point  $a'$  ( $\zeta = 1$ ) the phreatic line has a vertical asymptote given by equation (11) because

$$\int_0^{\infty} \frac{\tau d\tau}{\sinh \tau} = \frac{\pi^2}{4}, \quad (\text{A12a})$$

while

$$\int \frac{\tau d\tau}{\sinh \tau} = \tau - \frac{\tau^3}{18} + \frac{7\tau^5}{1800} - \dots + \frac{(-1)^n 2(2^{2n} - 1)B_n \tau^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad (\text{A12b})$$

where  $B_n = n$ th Bernoulli number.

#### A5. Relationship for Channel Perimeter

[17] The shape of the perimeter of the channel is given by equation (5):

$$X + iY = \frac{T}{\pi} \tan^{-1} \sqrt{-\zeta} - i \left( y - \frac{y}{2G} \int_0^{\sinh^{-1} \sqrt{-\zeta}} \frac{\tau d\tau}{\cosh \tau} \right). \quad (\text{A13a})$$

Equating real and imaginary parts,

$$X = \frac{T}{\pi} \tan^{-1} \sqrt{-\zeta} \quad (\text{A13b})$$

$$Y = - \left( y - \frac{y}{2G} \int_0^{\sinh^{-1} \sqrt{-\zeta}} \frac{\tau d\tau}{\cosh \tau} \right). \quad (\text{A13c})$$

Equations (A13b) and (A13c) are parametric equations for the shape of the channel perimeter. From equation (A13b),

$$\sqrt{-\zeta} = \tan \left( \frac{\pi X}{T} \right). \quad (\text{A13d})$$

Plugging  $\zeta$  into equation (A13c) yields equation (8).

#### A6. Variation in Seepage Velocity

[18] The distribution of the velocity of seeping water normal to the channel perimeter can be found by substituting the value of  $c$  in equation (13) and manipulating

$$\frac{u + iv}{u^2 + v^2} = \frac{\pi}{2G} \frac{y}{q_s} \sinh^{-1} \sqrt{-\zeta} - \frac{iT}{q_s}. \quad (\text{A14a})$$

Eliminating  $q_s$  and separating real and imaginary parts,

$$\frac{u}{u^2 + v^2} = \frac{\pi}{2G} \frac{y}{k(T + \pi^2 y/4G)} \sinh^{-1} \sqrt{-\zeta} \quad (\text{A14b})$$

$$\frac{v}{u^2 + v^2} = - \frac{T}{k(T + \pi^2 y/4G)}. \quad (\text{A14c})$$

Squaring and adding these equations,

$$\frac{u^2 + v^2}{(u^2 + v^2)^2} = \frac{1}{V^2} = \left( \frac{\pi}{2G} \frac{y}{k(T + \pi^2 y/4G)} \sinh^{-1} \sqrt{-\zeta} \right)^2 + \left( \frac{T/y}{k(T + \pi^2 y/4G)} \right)^2, \quad (\text{A14d})$$

which gives

$$V = \frac{k(T + \pi^2 y/4G)}{\sqrt{((\pi \sinh^{-1} \sqrt{-\zeta})/2G)^2 + (T/y)^2}}. \quad (\text{A14e})$$

Equation (A13d) can be used to eliminate  $\zeta$  in equation (A14e) to get equation (14).

[19] **Acknowledgments.** The All India Council for Technical Education, New Delhi, has sponsored this study under the scheme Career Award for Young Teachers (1-15/FD/CA(18)/2001-2002). Their financial support is duly acknowledged. The author would like to thank A. R. Kacimov and two other anonymous reviewers for their insightful review and constructive suggestions, which resulted in a significant improvement of the manuscript.

#### References

- Anakhaev, K. N. (2004), Free percolation and seepage flows from water-courses, *J. Fluid Dyn.*, 39(5), 756–761.
- Aravin, V. I., and S. N. Numerov (1965), *Theory of Flow in Undeformable Porous Media*, Isr. Program for Sci. Transl., Jerusalem.
- Chahar, B. R. (2000), Optimal design of channel sections considering seepage and evaporation losses, Ph.D. thesis, Univ. of Roorkee, Roorkee, India.
- Chahar, B. R. (2001), Extension of Vederikov's graph for seepage from canals, *Ground Water*, 39(2), 272–275.
- Chahar, B. R. (2005), Seepage from canals, project report, All India Council for Tech. Educ., New Delhi.
- Chow, V. T. (1973), *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, New York.
- Harr, M. E. (1962), *Groundwater and Seepage*, McGraw-Hill, New York.
- Hunt, B. W. (1972), Seepage from shallow open channel, *J. Hydraul. Div. Am. Soc. Civ. Eng.*, 98(HY5), 779–785.
- Huyakom, P. S., and G. F. Pinder (1983), *Computational Methods in Subsurface Flow*, Elsevier, New York.
- Ilyinskii, N. B., and A. R. Kacimov (1984), Seepage limitation optimization of the shape of an irrigation channel by the inverse boundary value problem method, *J. Fluid Dyn.*, 19(4), 404–410.
- Kacimov, A. R. (2001), Optimal shape of a variable condenser, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 457, 485–494.
- Kacimov, A. R. (2003), Discussion of "Design of minimum seepage loss nonpolygon canal sections" by Prabhata K. Swamee and Deepak Kashyap, *J. Irrig. Drain. Eng.*, 129(1), 68–70.
- Kacimov, A. R., and Y. V. Obnosov (2002), Analytical determination of seeping soil slopes of a constant exit gradient, *Z. Angew. Math. Mech.*, 82(6), 363–376.
- Kovacs, G. (1981), *Seepage Hydraulics*, Elsevier, New York.
- Liggett, J. A., and P. L.-F. Liu (1983), *The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow*, Allen and Unwin, St. Leonards, N. S. W., Australia.
- Morel-Seytoux, H. J. (1964), Domain variations in channel seepage flow, *J. Hydraul. Div. Am. Soc. Civ. Eng.*, 90(HY2), 55–79.
- Muskat, M. (1982), *Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*, Int. Hum. Resour. Dev. Corp., Boston.
- Polubarinova-Kochina, P. Y. (1962), *Theory of Groundwater Movement*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.
- Remson, I., G. M. Homberger, and F. J. Molz (1971), *Numerical Methods in Subsurface Hydrology*, Wiley-Interscience, Hoboken, N. J.
- Strack, O. D. L. (1989), *Groundwater Mechanics*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, N. J.

- Strack, O. D. L., and M. I. Asgian (1978), A new function for use in the hodograph method, *Water Resour. Res.*, 14, 1045–1058.
- Swamee, P. K., and D. Kashyap (2001), Design of minimum seepage loss nonpolygon canal sections, *J. Irrig. Drain. Eng.*, 127(2), 113–117.
- Swamee, P. K., G. C. Mishra, and B. R. Chahar (2000), Design of minimum seepage loss canal sections, *J. Irrig. Drain. Eng.*, 126(1), 28–32.
- Swamee, P. K., G. C. Mishra, and B. R. Chahar (2001a), Closure to discussion of “Design of minimum seepage loss canal sections,” *J. Irrig. Drain. Eng.*, 127(3), 191–192.
- Swamee, P. K., G. C. Mishra, and B. R. Chahar (2001b), Design of minimum seepage loss canal sections with drainage layer at shallow depth, *J. Irrig. Drain. Eng.*, 127(5), 287–294.

---

B. R. Chahar, Department of Civil Engineering, Indian Institute of Technology Delhi, Hauz Khas, New Delhi 110 016, India. (chahar@civil.iitd.ac.in)

# Analysis of Seepage from Polygon Channels

Bhagu R. Chahar<sup>1</sup>

**Abstract:** An exact analytical solution for the quantity of seepage from a trapezoidal channel underlain by a drainage layer at a shallow depth has been obtained using an inverse hodograph and a Schwarz-Christoffel transformation. The symmetry about the vertical axis has been utilized in obtaining the solution for half of the seepage domain only. The solution also includes relations for variation in seepage velocity along the channel perimeter and a set of parametric equations for the location of phreatic line. From this generalized case, particular solutions have also been deduced for rectangular and triangular channels with a drainage layer at finite depth and trapezoidal, rectangular, and triangular channels with a drainage layer and water table at infinite depth. Moreover, the analysis includes solutions for a slit, which is also a special case of polygon channels, for both cases of the drainage layer. These solutions are useful in quantifying seepage loss and/or artificial recharge of groundwater through polygon channels.

**DOI:** 10.1061/(ASCE)0733-9429(2007)133:4(451)

**CE Database subject headings:** Open channels; Canals; Porous media; Groundwater; Seepage; Artificial recharge; Mapping.

## Introduction

Study of seepage from polygon (straight line boundary) channels is important due to its applications in areas of irrigation engineering, groundwater hydrology, and reservoir management. The loss of water due to seepage from irrigation canals constitutes a substantial part of the usable water (Rohwer and Stout 1948; Worstell 1976). The seepage loss results not only in depleted fresh water resources but also causes water logging, salinization, groundwater contamination, and health hazards. Canal lining is adopted to check seepage but cracks develop in the lining for various reasons and seepage from a canal with cracked lining is likely to approach the quantity of seepage from an unlined canal (Wachyan and Rushton 1987). Therefore, optimization of geometrical elements of polygon channels to minimize seepage loss is gaining importance (Kacimov 1992; Swamee et al. 2002a,b). On the other hand, an increased seepage in the form of artificial recharge of groundwater is practiced to mitigate the problems of groundwater depletion and its deleterious consequences. The seepage and recharge from a channel is governed by the same principle of flow through a porous medium and controlled by hydraulic conductivity of the subsoils, channel geometry, hydraulic gradient between the channel and the aquifer underneath, and the initial and boundary conditions (International Commission on Irrigation and Drainage 1967).

Vedernikov (Harr 1962) gave an exact mathematical solution to unconfined, steady-state seepage from a triangular and a trapezoidal channel in a homogeneous, isotropic, porous medium of large depth using inversion of hodograph and conformal mapping

techniques. The solution of a rectangular channel was given by Morel-Seytoux (1964) using conformal mapping and Green-Neumann functions. Chahar (2001) analyzed seepage from slit and strip channels as special cases of a polygon channel and also presented results for trapezoidal, triangular, and rectangular channels in graphical form. Muskat (1982) suggested an approximate solution using Zhukovsky functions and conformal mapping techniques for a trapezoidal channel in a porous medium of finite depth underlain by a drainage layer. Chahar (2000) and Swamee et al. (2001) obtained an analytical solution for seepage from a rectangular channel in a soil layer of finite depth overlying a drainage layer using inversion of hodograph and conformal mapping techniques. Bruch and Street (1967a,b) used the same method in computing seepage from a triangular channel underlain by a drainage layer at shallow depth. Seepage from polygon channels has also been estimated by several investigators for different boundary conditions using analytical methods (El Nimr 1963; Garg and Chawla 1970; Sharma and Chawla 1974, 1979), electrical analogue methods (Bouwer 1965) and numerical methods (Jeppson 1968; Remson et al. 1971; Pinder and Gray 1977; Liggett and Liu 1983). Approximate solutions by numerical methods have gained importance due to easy availability of high speed digital computers along with specialized software. However, generalized solutions in the functional form are not possible through numerical methods; instead they result only in a numerical value as a problem specific particular solution.

This review reveals that exact analytical solutions for computing seepage from a trapezoidal channel in porous medium of finite depth underlain by a drainage layer are not available using hodographs. Further, available analytical solutions for triangular, rectangular, and trapezoidal channels were obtained by different investigators using different methods or different point of openings in the mapping planes, so these solutions differ from expressions obtained as limiting or particular cases of the solution for the most general problem. In the present study, an exact analytical solution for the quantity of seepage from a trapezoidal channel underlain by a drainage layer at a shallow depth has been obtained using an inverse hodograph and Schwarz-Christoffel transformations for one half of the seepage domain. Moreover its

<sup>1</sup>Assistant Professor, Dept. of Civil Engineering, Indian Institute of Technology Delhi, New Delhi 110016, India. E-mail:chahar@civil.iitd.ac.in

Note. Discussion open until September 1, 2007. Separate discussions must be submitted for individual papers. To extend the closing date by one month, a written request must be filed with the ASCE Managing Editor. The manuscript for this paper was submitted for review and possible publication on August 11, 2005; approved on August 9, 2006. This paper is part of the *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 133, No. 4, April 1, 2007. ©ASCE, ISSN 0733-9429/2007/4-451-460/\$25.00.

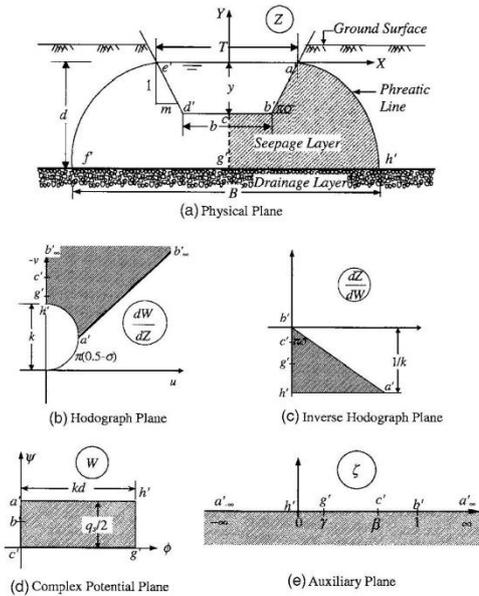


Fig. 1. Seepage from a trapezoidal channel underlain by a drainage layer

particular cases corresponding to a drainage layer at finite and infinite depths have been dealt with.

### Analytical Solution

Consider a trapezoidal channel of bed width  $b$  (m), depth of water  $y$  (m), and side slope  $m$  (1 Vertical:  $m$  Horizontal) passing through a homogeneous isotropic porous medium of hydraulic conductivity  $k$  (m/s) underlain by a horizontal drainage layer at a depth  $d$  (m) below the water surface as shown in Fig. 1(a). The steady seepage discharge per unit length of channel  $q_s$  ( $m^2/s$ ) complying with Darcy's law can be expressed in the following simplest form (Chahar 2000; Swamee et al. 2000)

$$q_s = kyF_s \quad (1)$$

where  $F_s$  (dimensionless seepage function)=function of channel geometry and boundary conditions.

The pattern of seepage from the channel is shown in Fig. 1(a). The effects of capillarity, infiltration, and evaporation are ignored. In view of the significant length of the channel, the seepage flow can be considered two dimensional in the vertical plane. It is assumed that the water table is below the top of the drainage layer and hence atmospheric pressure prevails at the bottom of the seepage layer. The seepage domain has symmetry about vertical axis  $Y$  so half of the domain ( $a'b'c'g'h'a'$ ) has been used in the analysis. Defining complex potential  $W = \phi + i\psi$  [Fig. 1(d)] where  $\phi$ =velocity potential ( $m^2/s$ ) which is equal to  $k$  times the head  $h$  (m) and  $\psi$ =stream function ( $m^2/s$ ) which is constant along streamlines. If the physical plane is defined as  $Z = X + iY$  then Darcy's law yields  $u = \partial\phi/\partial X = -k \partial h/\partial X$  and  $v = \partial\phi/\partial Y = -k \partial h/\partial Y$ ;

where  $u$  and  $v$ =velocity or specific discharge vectors (m/s) in  $X$  and  $Y$  directions, respectively. The hodograph  $dW/dZ = u - iv$  [Fig. 1(b)] and the inverse hodograph  $dZ/dW$  [Fig. 1(c)] for half of the seepage flow domain ( $a'b'c'g'h'a'$ ) have been drawn following the standard steps (see Harr 1962; Polubarinova-Kochina 1962; or Strack 1989). The  $dZ/dW$  plane and  $W$  plane have been mapped on the lower half ( $\zeta \leq 0$ ) of an auxiliary ( $\zeta$ ) plane [Fig. 1(e)] using the Schwarz-Christoffel conformal transformation.

Mapping of the inverse hodograph plane on the auxiliary plane (see Appendix I) is

$$\frac{dZ}{dW} = \frac{-ie^{i\pi\sigma}}{kB(1/2, \sigma)} \int_1^\zeta \frac{dt}{(t-1)^{1-\sigma}\sqrt{t}} \quad (2)$$

where  $\pi\sigma = \cot^{-1}m$ ;  $t$ =dummy variable; and  $B(1/2, \sigma)$ =complete beta function. The  $W$  plane mapping on the auxiliary plane is

$$W = i \frac{kd\sqrt{\beta}}{2K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})} \int_\beta^\zeta \frac{dt}{\sqrt{t(t-\gamma)(t-\beta)}} \quad (3)$$

where  $\beta$  and  $\gamma$ =transformation variables; and  $K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})$ =complete elliptical integral of the first kind with a modulus ( $\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta}$ ) (Byrd and Friedman 1971). Using Eq. (2) and the derivative of Eq. (3) and then integrating (see Appendix I) result in the mapping of physical plane on the auxiliary plane as

$$Z = \frac{B}{2} - id + \frac{e^{i\pi\sigma}}{B(1/2, \sigma)} \frac{d\sqrt{\beta}}{2K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})} \times \int_0^\zeta \left( \int_1^t \frac{d\tau}{(\tau-1)^{1-\sigma}\sqrt{\tau}} \right) \frac{dt}{\sqrt{t(t-\beta)(t-\gamma)}} \quad (4)$$

where  $B$ =width of saturated porous medium at the level of drainage layer (m); and  $\tau$ =another dummy variable. Eq. (4) defines the physical domain of the seepage flow  $a'b'c'g'h'a'$  [Fig. 1(a)]. For example, at  $g'$  ( $\zeta = \gamma; Z = -id$ )

$$B = \frac{d\sqrt{\beta}}{K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})B(1/2, \sigma)} \int_0^\gamma \frac{F_1(t, \sigma) dt}{\sqrt{t(\beta-t)(\gamma-t)}} \quad (5)$$

where  $F_1(t, \sigma)$  is defined by Eq. (44). At the center of the channel  $c'$  ( $\zeta = \beta; Z = -iy$ ) Eq. (4) reduces to

$$y = \frac{d\sqrt{\beta}}{2K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})B(1/2, \sigma)} \int_\gamma^\beta \frac{B_1(1/2, \sigma) dt}{\sqrt{t(\beta-t)(t-\gamma)}} \quad (6)$$

and at the corner of channel  $b'$  ( $\zeta = 1; Z = b/2 - iy$ ) it yields

$$b = \frac{d\sqrt{\beta}}{K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})B(1/2, \sigma)} \int_\beta^1 \frac{F_1(t, \sigma) dt}{\sqrt{t(t-\beta)(t-\gamma)}} \quad (7)$$

where  $B_1(1/2, \sigma)$ =incomplete beta function (Abramowitz and Stegun 1972) given by Eq. (45).

The phreatic line  $a'h'$  ( $-\infty < \zeta < 0$ ) can be located by manipulating Eq. (4) and then separating the real and imaginary parts

$$X = \left( \frac{B}{2} - d\sqrt{\beta} \int_0^\zeta \frac{F_3(t, \sigma) dt}{\sqrt{(-t)(\beta-t)(\gamma-t)}} \right) / \left( 2K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})B(1/2, \sigma) \right) \quad (8a)$$

$$Y = \frac{d}{K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})} (K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta}) - F(\sin^{-1}(\sqrt{\zeta/(\zeta-\gamma)}), \sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})) \quad (8b)$$

where  $F_2(t, \sigma)$  is defined by Eq. (54);  $F(\sin^{-1}(\sqrt{\zeta/(\zeta-\gamma)}), \sqrt{(\beta-\gamma)/\beta}) =$  incomplete elliptical integral of the first kind with modulus  $\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta}$ , and amplitude  $\sin^{-1}(\sqrt{\zeta/(\zeta-\gamma)})$  (Byrd and Friedman 1971).

### Computation of Seepage Quantity

Using the values at the point  $h'(\zeta=0; W=kd+iq_s/2)$  in Eq. (3)

$$kd + \frac{q_s}{2}i = \frac{ikd\sqrt{\beta}}{2K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})} \int_{\beta}^0 \frac{dt}{\sqrt{t(\beta-t)(t-\gamma)}} \quad (9)$$

which leads to

$$q_s = 2kdK(\sqrt{\gamma/\beta})/K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta}) \quad (10)$$

Equating Eq. (1) with Eq. (10) gives

$$F_s = 2 \frac{d}{y} K(\sqrt{\gamma/\beta})/K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta}) \quad (11)$$

This involves two transformation parameters  $\beta$  and  $\gamma$ . Using Eqs. (6) and (7)

$$\frac{d}{y} = 2K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})B(1/2, \sigma) \left/ \sqrt{\beta} \int_{\gamma}^{\beta} \frac{B_t(1/2, \sigma) dt}{\sqrt{t(\beta-t)(t-\gamma)}} \right. \quad (12a)$$

$$\frac{b}{y} = 2 \int_{\beta}^1 \frac{F_1(t, \sigma) dt}{\sqrt{t(t-\beta)(t-\gamma)}} \left/ \int_{\gamma}^{\beta} \frac{B_t(1/2, \sigma) dt}{\sqrt{t(\beta-t)(t-\gamma)}} \right. \quad (12b)$$

Substituting  $d/y$  from Eqs. (12a) in Eq. (11)

$$F_s = 4K(\sqrt{\gamma/\beta})B(1/2, \sigma) \left/ \sqrt{\beta} \int_{\gamma}^{\beta} \frac{B_t(1/2, \sigma) dt}{\sqrt{t(\beta-t)(t-\gamma)}} \right. \quad (13)$$

Simultaneous solution of Eqs. (12a) and (12b) for the given channel dimensions ( $b, y$ , and  $\sigma$ ) and depth of the drainage layer ( $d$ ) results in parameters  $\beta$  and  $\gamma$ . Using these values in Eq. (13), the seepage function and then the quantity of seepage can be determined. Further, these values can be used in Eq. (5) to find the width of seepage domain at the drainage layer. Finally the phreatic line can be plotted using  $\beta$  and  $\gamma$  in Eqs. (8a) and (8b). However these equations involve complicated integrals with implicit transformation variables. These integrals (complete and incomplete beta functions, complete and incomplete elliptical integrals, and remaining improper integrals) can be evaluated using numerical integration (Press et al. 1992) after converting the improper integrals into proper integrals (Chahar 2005).

As the depth of the drainage layer becomes very large the transformation variable  $\gamma$  approaches a value equal to zero and the seepage function changes to (refer to Appendix I)

$$F_s = \frac{2\pi B(1/2, \sigma)}{\sqrt{\beta} \sin \pi\sigma} \left/ \int_1^{\infty} \frac{F_2(t, \sigma) dt}{t\sqrt{t-\beta}} \right. \\ = \frac{2\pi B(1/2, \sigma)}{\sqrt{\beta}} \left/ \int_0^{\beta} \frac{B_t(t, \sigma) dt}{t\sqrt{\beta-t}} \right. \quad (14)$$

where the transformation variable  $\beta$  for this case is given by

$$\frac{b}{y} = 2 \int_{\beta}^1 \frac{F_1(t, \sigma) dt}{t\sqrt{t-\beta}} \left/ \int_0^{\beta} \frac{B_t(t, \sigma) dt}{t\sqrt{\beta-t}} \right. \quad (15)$$

### Variation in Seepage Velocity

From Eq. (2)

$$\frac{dZ}{dW} = \frac{1}{u-iv} = \frac{u+iv}{u^2+v^2} = \frac{-ie^{i\pi\sigma}}{kB(1/2, \sigma)} \int_1^{\zeta} \frac{dt}{(t-1)^{1-\sigma}\sqrt{t}} \quad (16)$$

Equating the real and imaginary parts and then squaring and adding them along the bed of the channel  $c'b'(\beta \leq \zeta \leq 1)$  results

$$\frac{V}{k} = B(1/2, \sigma) \left/ \int_{\beta}^1 \frac{dt}{(t-1)^{1-\sigma}\sqrt{t}} \right. \quad (17)$$

where  $V = \sqrt{u^2+v^2}$  is the resultant velocity of seeping water. The denominator is zero when  $\zeta=1$ ; hence at the corner of the channel

$$\frac{V}{k} = \infty \quad (18)$$

The minimum seepage velocity along the bed of the channel occurs at the center  $c'(\zeta=\beta)$  and is equal to

$$\frac{V}{k} = B(1/2, \sigma) \left/ \int_{\beta}^1 \frac{dt}{(t-1)^{1-\sigma}\sqrt{t}} \right. \quad (19)$$

The relationship for the seepage velocity along the side slope of the channel  $b'a'(1 \leq \zeta \leq \infty)$  is

$$\frac{V}{k} = B(1/2, \sigma) \left/ \int_1^{\zeta} \frac{dt}{(t-1)^{1-\sigma}\sqrt{t}} \right. \quad (20)$$

The minimum seepage velocity along the side slope of the channel at the water surface  $a'(\zeta=\infty)$  is

$$\frac{V}{k} = B(1/2, \sigma) \left/ \int_1^{\infty} \frac{dt}{(t-1)^{1-\sigma}\sqrt{t}} \right. \\ = B(1/2, \sigma)/B(1/2-\sigma, \sigma) \\ = \cos \pi\sigma \quad (21)$$

This shows that the seepage velocity at the water surface is zero for a rectangular channel shape (i.e.,  $\sigma=0.5$ ) and is equal to the hydraulic conductivity of the porous medium for a strip channel (i.e.,  $\sigma=0$ ) for which ponded water depth is small and water seeps vertical downwards with unit hydraulic gradient in saturated porous medium (Chahar 2001).

The expressions for the variation in the seepage velocity when the drainage layer is at infinite depth are identical to the case with the drainage layer at a shallow depth because the inverse hodograph mapping is identical in both cases except for the location of  $g'$ , which does not take part in Schwarz-Christoffel transformation due to vertex angle being equal to  $\pi$  in the drainage layer for the shallow depth case.

### Rectangular Channel

A rectangular section is a special case of a trapezoidal section with vertical side slopes. See Appendix I for details. Eq. (8a) for the  $X$ -coordinate of the phreatic line changes to

$$X = \frac{d\sqrt{\beta}}{\pi K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})} \left( \int_0^\gamma \frac{\pi/2 - \tan^{-1}\sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{t(\beta-t)(\gamma-t)}} dt - \int_\zeta^0 \frac{\sinh^{-1}\sqrt{-t}}{\sqrt{(-t)(\beta-t)(\gamma-t)}} dt \right) \quad (22)$$

while Eq. (8b) for the  $Y$  coordinate remains unaltered.

Since the  $W$  plane mapping for a rectangular channel is identical to a trapezoidal channel, the expressions for  $q_s$  [Eq. (10)] and  $F_s$  [Eq. (11)] remain unaltered, however,  $\beta$  and  $\gamma$  have values different than a trapezoidal channel. These transformation parameters can be obtained from the simultaneous solution of

$$\frac{d}{y} = \pi K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta}) / \sqrt{\beta} \int_\gamma^\beta \frac{\tan^{-1}\sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{t(\beta-t)(t-\gamma)}} dt \quad (23a)$$

$$\frac{b}{y} = \int_\beta^1 \frac{\pi/2 - \tan^{-1}\sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{t(t-\beta)(t-\gamma)}} dt / \int_\gamma^\beta \frac{\tan^{-1}\sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{t(\beta-t)(t-\gamma)}} dt \quad (23b)$$

Hence Eq. (13) changes to

$$F_s = 2\pi K(\sqrt{\gamma/\beta}) / \sqrt{\beta} \int_\gamma^\beta \frac{\tan^{-1}\sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{t(\beta-t)(t-\gamma)}} dt \quad (24)$$

For the drainage layer at large depth Eqs. (23b) and (24) transform to

$$\frac{b}{y} = \int_\beta^1 \frac{\pi/2 - \tan^{-1}\sqrt{t(1-t)}}{t\sqrt{t-\beta}} dt / \int_0^\beta \frac{\tan^{-1}\sqrt{t(1-t)}}{t\sqrt{\beta-t}} dt \quad (25)$$

$$F_s = \pi^2 / \sqrt{\beta} \int_0^\beta \frac{\tan^{-1}\sqrt{t(1-t)}}{t\sqrt{\beta-t}} dt \quad (26)$$

The seepage velocity distribution for the drainage layer at shallow as well as large depth cases along the bed of the rectangular channel ( $\beta \leq \zeta \leq 1$ ) is

$$\frac{V}{k} = \frac{\pi}{\pi - 2 \tan^{-1}\sqrt{\zeta/(1-\zeta)}} \quad (27)$$

and along the sides of the channel  $b'/a' (1 \leq \zeta \leq \infty)$  is

$$\frac{V}{k} = \frac{\pi}{2 \tanh^{-1}\sqrt{(\zeta-1)/\zeta}} \quad (28)$$

At the water surface  $\zeta = \infty$ , so the velocity of the seeping water is zero.

### Triangular Channel

A trapezoidal channel with zero bed width ( $b=0$ ) is a triangular channel. In the different mapping planes [Figs. 1(b-e)] the point  $b'$  coincides with the point  $c'$  and hence the transformation variable  $\beta$  vanishes after attaining a value equal to unity. Through  $\beta=1$ , various relations for a trapezoidal channel can be deduced for a triangular channel, for example, Eq. (13) for the seepage function reduces to

$$F_s = 4K(\sqrt{\gamma})B(1/2, \sigma) / \int_\gamma^1 \frac{B_s(1/2, \sigma) dt}{\sqrt{t(1-t)(t-\gamma)}} \quad (29)$$

and Eq. (12a) for the transformation parameter  $\gamma$  reduces to

$$\frac{d}{y} = 2K(\sqrt{1-\gamma})B(1/2, \sigma) / \int_\gamma^1 \frac{B_s(1/2, \sigma) dt}{\sqrt{t(1-t)(t-\gamma)}} \quad (30)$$

For a large depth of drainage layer Eq. (29) becomes

$$F_s = 2\pi B(1/2, \sigma) / \int_0^1 \frac{B_s(1/2, \sigma) dt}{t\sqrt{1-t}} \quad (31)$$

The seepage velocity distribution is identical to the variation in the seepage velocity along the sides in the trapezoidal channel.

### Slit

A very narrow and deep polygon channel can be assumed as a slit. For a slit, the width at water surface ( $T$ ) approaches zero, i.e.,  $T/y \rightarrow 0$ . This means  $m \rightarrow 0$  (or  $\sigma \rightarrow 0.5$ ) for a triangular section;  $b/y \rightarrow 0$  (or  $\beta \rightarrow 1$ ) for a rectangular channel; and both  $m \rightarrow 0$  and  $b/y \rightarrow 0$  for a trapezoidal channel. Thus Eq. (24) with  $\beta=1$  or Eq. (29) with  $\sigma=0.5$  results in the seepage function for a slit as

$$F_s = 2\pi K(\sqrt{\gamma}) / \int_\gamma^1 \frac{\tan^{-1}\sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{t(1-t)(t-\gamma)}} dt \quad (32)$$

For infinite depth of the drainage layer, Eq. (32) with  $\gamma=0$ , Eq. (26) with  $\beta=1$ , or Eq. (31) with  $\sigma=0.5$  yields

$$F_s = \pi^2 / \int_0^1 \frac{\tan^{-1}\sqrt{t(1-t)}}{t\sqrt{1-t}} dt = \frac{\pi^2}{4G} \approx \pi(4-\pi) \quad (33)$$

where  $G=0.915965594\dots$ =Catalan's constant. The outcome is identical to Chahar's (2000, 2001) solution.

### Example

As an example, we can compute the quantity of seepage/recharge from a trapezoidal channel having a bed width=3.0 m, a depth of flow=2 m, and side slopes=1 vertical: 1.5 horizontal, passing through a porous medium having hydraulic conductivity= $3 \times 10^{-6}$  m/s and underlain by a highly pervious drainage layer at a depth of 4.0 m.

For the given data  $b/y=1.5$  and  $d/y=2.0$ . Eqs. (12a) and (12b) should be solved simultaneously to get  $\beta$  and  $\gamma$ . However, since these equations are highly nonlinear and contain improper integrals, an indirect method has been used to find  $\beta$  and  $\gamma$ . The method consists of minimization of an objective function by Powell's conjugate search method (Press et al. 1992). The objective function is defined as

$$f(\beta, \gamma) = \left( \frac{d}{y} - f_1(\sigma, \beta, \gamma) \right)^2 + \left( \frac{b}{y} - f_2(\sigma, \beta, \gamma) \right)^2 \quad (34)$$

where  $f_1(\sigma, \beta, \gamma)$  and  $f_2(\sigma, \beta, \gamma)$  are right-hand sides of Eqs. (12a) and (12b), respectively. The minimum of this function is zero, which can be attained only when both of the parts of the function reach zero values and hence satisfy Eqs. (12a) and (12b). After removing singularities (Chahar 2005) and using Gaussian quadratures (96 points for weights and abscissa for both inner and outer integrals) for numerical integration (Abramowitz and Ste-

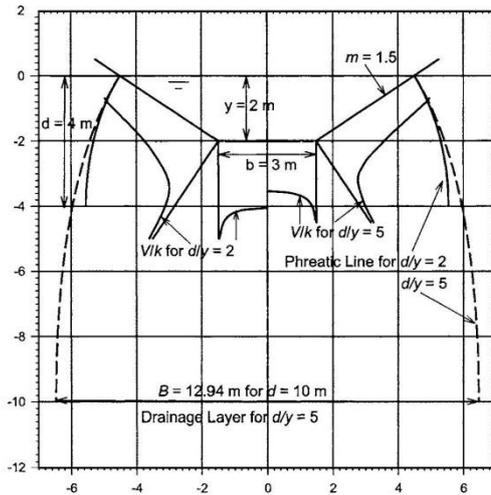


Fig. 2. Seepage velocity distribution and phreatic lines

gun 1972), the function was minimized for  $\beta$  and  $\gamma$  for given set of  $\sigma$ ,  $b/y$ , and  $d/y$  to get

$$\beta = 0.9353, \quad \gamma = 0.9145$$

Making use of these values in Eqs. (5) and (13)

$$B = 11.088 \text{ m}, \quad F_s = 8.3610$$

and finally from Eq. (1)

$$q_s = 5.0166 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s per meter run of the channel}$$

Adopting a similar procedure for Muskat's approximate solution [Eqs. (61a)–(61c)], the corresponding values are  $\beta = 0.9854$ ;  $\gamma = 0.96867$ ;  $F_s = 8.0185$ , and  $q_s = 4.8111 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s/m}$ , therefore it underestimates the seepage loss by 4.10%.

If the depth of the drainage layer is increased to 10.0 m (i.e.,  $d/y = 5$ ),  $\beta = 0.7217$  and  $\gamma = 0.1146$  and hence,  $B = 12.940 \text{ m}$ ,  $F_s = 6.9384$ , and  $q_s = 4.16304 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s/m}$ . It can be seen that the seepage loss is reduced by 17.01%. The comparisons between the two cases for phreatic surfaces and seepage velocity distributions along the channel perimeter are shown in Fig. 2.

### Discussions

Following the procedure as outlined in the above-presented example the seepage function was calculated for various values of  $d/y$  and  $b/y$  for a fixed value of  $\sigma$  (i.e.,  $m = 1.5$ ). The resultant values were plotted in Fig. 3. Similar graphs can be prepared for other values of  $m$ . Fig. 3 shows that the quantity of seepage is very sensitive to the presence of a drainage layer at a shallow depth (i.e.,  $d/y$  close to one) while the quantity of seepage varies a little with change in position of the drainage layer at large depth (i.e.,  $d/y > 5$ ) for given  $b/y$  and  $m$ .

Eqs. (17) and (20) include  $\sigma$  and  $\zeta$  only, as if the variations in the seepage velocities along the bed and the side slopes were independent of  $b$ ,  $y$ , and  $d$ . Therefore, they result in identical values of the seepage velocity for a same set of  $\sigma$  and  $\zeta$  regardless of

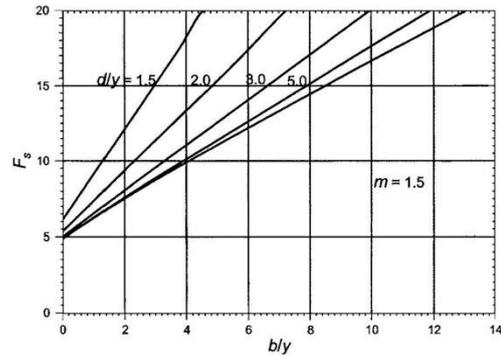


Fig. 3. Variation in seepage function with  $d/y$  and  $b/y$

$b$ ,  $y$ , and  $d$ . However, the transformation parameters ( $\beta$  and  $\gamma$ ) are controlled by  $\sigma$ ,  $b$ ,  $y$ , and  $d$ , so  $\zeta$  maps at different locations along the channel perimeter based on  $\sigma$ ,  $b$ ,  $y$ , and  $d$ , resulting in change in the seepage velocity with change in the channel dimensions or depth of the drainage layer. To show this, plots similar to Bouwer (1965) have been added in Fig. 2 for seepage velocity distributions for  $d/y = 2$  and  $d/y = 5$  for the worked example. The seepage velocities are higher for lower values of  $d/y$ . However, the seepage velocity at the originating point of the phreatic line is independent of  $d/y$  and  $b/y$  and a unique function of  $\sigma$  given by Eq. (21).

The solution given by Eqs. (10)–(13) can be compared with the existing Muskat's (1982) approximate solution [see Eq. (61)]. Similarly the present solutions for the rectangular channel [Eqs. (23)–(26)] and the triangular channel [Eqs. (29)–(31)] can also be compared with the existing solutions given in Appendix II. It can be seen that the present solution is consistent and convenient in obtaining limiting or particular solutions for channels of rectangular, triangular, and slit shapes both for drainage layer at shallow and large depths. On the other hand, the existing solutions by different investigators using different methods or different point of openings in the mapping planes differ from each other as well as cannot be deduced from each other. Further, the existing solutions lack in expressions for the velocity distribution along the channel perimeter.

### Conclusions

An exact analytical solution for the quantity of seepage from a trapezoidal channel underlain by a drainage layer at a shallow depth can be obtained using an inverse hodograph and Schwarz-Christoffel transformation for one half of the seepage domain. From this general solution, other special cases like a trapezoidal channel without a drainage layer, a rectangular channel underlain by a drainage layer at a shallow depth, a triangular channel underlain by a drainage layer at a shallow depth, a rectangular channel without a drainage layer, and a triangular channel without a drainage layer can be deduced. The analysis can also include solutions for the variation in the seepage velocity along the channel perimeter and the quantity of seepage from slit-like channels. Therefore the solution is exact, complete, consistent, and general. However, the solutions for the quantity of seepage, location of the

phreatic line, and width of seepage at the drainage layer contain improper integrals which can only be evaluated by numerical integration.

### Acknowledgments

The writer is grateful to All India Council for Technical Education, New Delhi for sponsoring this study under the scheme Career Award for Young Teachers (F. No. 1-15/FD/CA(18)/2001-2002). The writer would like to thank Dr. A. R. Kacimov and two other anonymous reviewers for their insightful review and constructive suggestions, which resulted in a significant improvement of the manuscript. The writer is also thankful to his Ph.D. student, Mahender Choudhary, for his assistance at various stages of the work.

### Appendix I. Mapping Details

#### Drainage Layer at Shallow Depth

#### Mapping of Inverse Hodograph Plane

Mapping of  $dZ/dW$  plane on the  $\zeta$  plane results in

$$\frac{dZ}{dW} = C_1 \int_0^\zeta \frac{dt}{(t-1)^{1-\sigma}\sqrt{t}} + C_2 \quad (35)$$

where  $C_1$  and  $C_2$ =constants. These constants can be found by using values of  $dZ/dW$  and  $\zeta$  at two points in  $dZ/dW$  plane and  $\zeta$  plane. Using the values at point  $b'$  ( $\zeta=1; dZ/dW=0$ ) and at the point  $h'$  ( $\zeta=0; dZ/dW=-i/k$ ) in Eq. (35) and solving simultaneously

$$C_1 = \frac{i}{k} \bigg/ \int_0^1 \frac{dt}{(t-1)^{1-\sigma}\sqrt{t}} = \frac{-ie^{i\pi\sigma}}{kB(1/2, \sigma)}, \quad C_2 = -\frac{i}{k} \quad (36)$$

where

$$\int_0^1 \frac{dt}{(t-1)^{1-\sigma}\sqrt{t}} = \frac{1}{(-1)^{1-\sigma}} \int_0^1 (1-t)^{\sigma-1} (t)^{(1/2)-1} dt = \frac{B(1/2, \sigma)}{(e^{-i\pi})^{1-\sigma}} \quad (37)$$

Substitution of  $C_1$  and  $C_2$  in Eq. (35) gives Eq. (2).

#### Mapping of Complex Potential Plane

The  $W$  plane mapping on the  $\zeta$  plane is

$$W = C_3 \int_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt{t(t-\gamma)(t-\beta)}} + C_4 \quad (38)$$

The constants  $C_3$  and  $C_4$  have been determined using the values at points  $c'$  ( $\zeta=\beta; W=0$ ) and  $g'$  ( $\zeta=\gamma; W=kd$ ). After substituting  $C_3$  and  $C_4$ , Eq. (38) becomes

$$W = kd \int_\beta^\zeta \frac{dt}{\sqrt{t(t-\gamma)(t-\beta)}} \bigg/ \int_\beta^\gamma \frac{dt}{\sqrt{t(t-\gamma)(t-\beta)}} \quad (39)$$

We know that

$$\int_\beta^\gamma \frac{dt}{\sqrt{t(t-\gamma)(t-\beta)}} = -i \int_\gamma^\beta \frac{dt}{\sqrt{t(t-\gamma)(\beta-t)}} = -i \frac{2}{\sqrt{\beta}} K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta}) \quad (40)$$

Combining Eqs. (39) and (40) results in Eq. (3). Differentiating Eq. (3) with respect to  $\zeta$  gives

$$\frac{dW}{d\zeta} = i \frac{kd\sqrt{\beta}}{2K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})} \frac{1}{\sqrt{\zeta(\zeta-\gamma)(\zeta-\beta)}} \quad (41)$$

#### Mapping of Physical Plane

Since  $dZ/d\zeta = (dZ/dW)(dW/d\zeta)$ , substitution of  $dZ/dW$  from Eq. (2) and  $dW/d\zeta$  from Eq. (41) results in

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \frac{e^{i\pi\sigma}}{B(1/2, \sigma)} \frac{d\sqrt{\beta}}{2K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})} \times \left( \int_1^\zeta \frac{dt}{(t-1)^{1-\sigma}\sqrt{t}} \right) \frac{1}{\sqrt{\zeta(\zeta-\beta)(\zeta-\gamma)}} \quad (42)$$

Integrating Eq. (42) and applying the condition at  $h'$  ( $\zeta=0; Z=B/2-id$ ) gives Eq. (4). Along the drainage layer  $h'g'$  [Fig. 1(a)],  $0 \leq \zeta \leq \gamma$  and hence Eq. (4) at  $g'$  ( $\zeta=\gamma; Z=-id$ ) becomes

$$\frac{B}{2} = \frac{1}{B(1/2, \sigma)} \frac{d\sqrt{\beta}}{2K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})} \times \int_0^\gamma \left( \int_t^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\sigma}\sqrt{\tau}} \right) \frac{dt}{\sqrt{t(\beta-t)(\gamma-t)}} \quad (43)$$

Let

$$F_1(t, \sigma) = \int_t^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\sigma}\sqrt{\tau}} = \int_0^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\sigma}\sqrt{\tau}} - \int_0^t \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\sigma}\sqrt{\tau}} = B(1/2, \sigma) - B_t(1/2, \sigma) \quad (44)$$

where

$$B_t\left(\frac{1}{2}, \sigma\right) = \int_0^t \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\sigma}\sqrt{\tau}} = 2\sqrt{t} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1-\sigma; \frac{3}{2}; t\right) \quad (45)$$

in which  ${}_2F_1$ =Gauss-Hypergeometric series (Abramowitz and Stegun 1972) given by

$${}_2F_1(a, b; c; t) = 1 + \frac{ab}{c}t + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)(1)(2)}t^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)(1)(2)(3)}t^3 + \dots \quad (46)$$

Therefore Eq. (43) can be rewritten as Eq. (5). Along the center line of channel  $g'c'$  ( $\gamma \leq \zeta \leq \beta$ ), Eq. (4) becomes

$$Z = -id + \frac{i}{B(1/2, \sigma)} \frac{d\sqrt{\beta}}{2K(\sqrt{(\beta - \gamma)/\beta})} \times \int_{\gamma}^{\zeta} \left( \int_t^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\sigma}\sqrt{\tau}} \right) \frac{dt}{\sqrt{t(\beta-t)(t-\gamma)}} \quad (47)$$

so that at the center of the channel  $g'$  ( $\zeta = \beta; Z = -iy$ ) this reduces to Eq. (6). Further, Eq. (4) along the bed of the channel  $c'b'$  ( $\beta \leq \zeta \leq 1$ ) becomes

$$Z = -iy + \frac{1}{B(1/2, \sigma)} \frac{d\sqrt{\beta}}{2K(\sqrt{(\beta - \gamma)/\beta})} \times \int_{\beta}^{\zeta} \left( \int_t^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\sigma}\sqrt{\tau}} \right) \frac{dt}{\sqrt{t(\beta-t)(t-\gamma)}} \quad (48)$$

at the corner of channel  $b'$  ( $\zeta = 1; Z = b/2 - iy$ ) Eq. (48) yields Eq. (7). Finally Eq. (4) along the side slope of the channel  $b'a'$  ( $1 \leq \zeta \leq \infty$ ) is

$$Z = \frac{b}{2} - iy + \frac{e^{i\pi\sigma}}{B(1/2, \sigma)} \frac{d\sqrt{\beta}}{2K(\sqrt{(\beta - \gamma)/\beta})} \times \int_1^{\zeta} \left( \int_1^t \frac{d\tau}{(\tau-1)^{1-\sigma}\sqrt{\tau}} \right) \frac{dt}{\sqrt{t(\beta-t)(t-\gamma)}} \quad (49)$$

Therefore at water surface  $a'$  ( $\zeta = \infty; Z = b/2 + y \cot \pi\sigma$ ), it gives

$$y = \frac{d\sqrt{\beta} \sin \pi\sigma}{2K(\sqrt{(\beta - \gamma)/\beta})B(1/2, \sigma)} \int_1^{\infty} \frac{F_2(t, \sigma) dt}{\sqrt{t(\beta-t)(t-\gamma)}} \quad (50)$$

in which

$$F_2(t, \sigma) = \int_1^t \frac{d\tau}{(\tau-1)^{1-\sigma}\sqrt{\tau}} \quad (51)$$

Eqs. (50) and (6) must give identical results for  $y$ , therefore

$$\int_{\gamma}^{\beta} \frac{B_t(1/2, \sigma) dt}{\sqrt{t(\beta-t)(t-\gamma)}} = \sin \pi\sigma \int_1^{\infty} \frac{F_2(t, \sigma) dt}{\sqrt{t(\beta-t)(t-\gamma)}} \quad (52)$$

#### Position of Phreatic Line

The phreatic line  $a'h'$  ( $-\infty < \zeta < 0$ ) can be located by manipulating Eq. (4) as

$$Z = \frac{B}{2} - id + \frac{id\sqrt{\beta}}{2K(\sqrt{(\beta - \gamma)/\beta})} \int_0^{\zeta} \left( 1 + \frac{i}{B(1/2, \sigma)} \times \int_0^t \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\sigma}\sqrt{\tau}} \right) \frac{dt}{\sqrt{(-t)(\beta-t)(\gamma-t)}} \quad (53)$$

Letting

$$\int_0^t \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\sigma}\sqrt{\tau}} = F_3(t, \sigma) \quad (54)$$

and separating the real and imaginary parts leads to Eqs. (21) and (22), where

$$\int_{\zeta}^0 \frac{dt}{\sqrt{(-t)(\beta-t)(\gamma-t)}} = \frac{2}{\sqrt{\beta}} F(\sin^{-1} \sqrt{\zeta/(\zeta - \gamma)}, \sqrt{(\beta - \gamma)/\beta}) \quad (55)$$

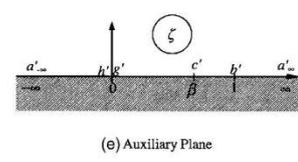
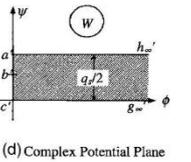
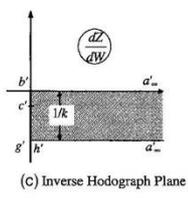
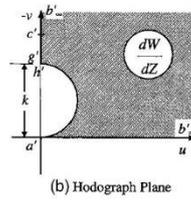
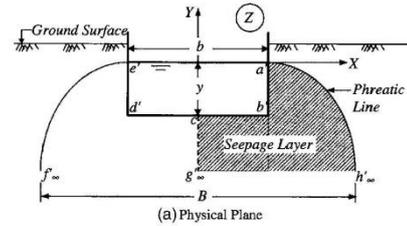


Fig. 4. Seepage from a rectangular channel with a drainage layer at infinite depth

#### Rectangular Channel

For a rectangular channel  $m=0$ , so  $\sigma=0.5$  [See Fig. 4(a)] and hence the mappings in the hodograph and inverse hodograph planes are modified as shown in Figs. 4(b and c), respectively (except that the points  $g'$  and  $h'$  map to separate locations, similar to the trapezoidal case). However, the mapping in the complex potential plane remains unaltered, i.e., similar to Fig. 1(d). With  $\sigma=0.5$

$$B\left(\frac{1}{2}, \sigma\right) = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{1-\sigma}\sqrt{t}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi \quad (56a)$$

$$F_1(\sigma, t) = \int_t^1 \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\sigma}\sqrt{\tau}} = \int_t^1 \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau)}} = \pi - 2 \tan^{-1} \sqrt{t/(1-t)} \quad (56b)$$

$$F_2(\sigma, t) = \int_1^t \frac{d\tau}{(\tau-1)^{1-\sigma}\sqrt{\tau}} = \int_1^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(\tau-1)}} = 2 \tanh^{-1} \sqrt{(t-1)/t} \quad (56c)$$

and

$$F_3(\sigma, t) = \int_0^t \frac{d\tau}{(1-\tau)^{1-\sigma}\sqrt{\tau}} = \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau(1-\tau)}} = -2 \sinh^{-1} \sqrt{-t} \quad (56d)$$

Therefore, the relevant equations transform to

$$\frac{dZ}{dW} = \frac{i}{k} \int_1^{\zeta} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} \bigg/ \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} = \frac{2 \tanh^{-1} \sqrt{(\zeta-1)/\zeta}}{\pi k} \quad (57a)$$

$$Z = \frac{B}{2} - id + \frac{id\sqrt{\beta}}{\pi K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})} \int_0^{\zeta} \frac{\tanh^{-1} \sqrt{(t-1)/t}}{\sqrt{t(t-\beta)(t-\gamma)}} dt \quad (57b)$$

$$\frac{B}{2} = \frac{d\sqrt{\beta}}{\pi K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})} \int_0^{\gamma} \frac{\pi/2 - \tan^{-1} \sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{t(\beta-t)(\gamma-t)}} dt \quad (57c)$$

$$y = \frac{d\sqrt{\beta}}{\pi K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})} \int_{\gamma}^{\beta} \frac{\tan^{-1} \sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{t(\beta-t)(t-\gamma)}} dt$$

$$= \frac{d\sqrt{\beta}}{\pi K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})} \int_1^{\infty} \frac{\tanh^{-1} \sqrt{(t-1)/t}}{\sqrt{t(t-\beta)(t-\gamma)}} dt \quad (57d)$$

and

$$b = \frac{d\sqrt{\beta}}{\pi K(\sqrt{(\beta-\gamma)/\beta})} \int_{\beta}^1 \frac{\pi/2 - \tan^{-1} \sqrt{t(1-t)}}{\sqrt{t(t-\beta)(t-\gamma)}} dt \quad (57e)$$

#### Drainage Layer and Water Table at Infinite Depth

##### Trapezoidal Channel

When the drainage layer and water table both lie at infinite depth in a homogeneous isotropic porous medium of infinite extent both the points  $g'$  and  $h'$  approach each other in the hodograph and inverse hodograph mapping planes [Figs. 1(b and c)]. At infinite depth the hydraulic gradient becomes unity and the seepage velocity acquires a uniform magnitude equal to the hydraulic conductivity over a horizontal plane. However, at infinite depth the velocity potential becomes infinite, so the mapping in the  $W$  plane converts to a semi-infinite strip as shown in Fig. 4(d). With these adjustments, the transformation variable  $\gamma$  in Fig. 1(e) vanishes from the transformation after attaining a value equal to zero and the changed relations turn into

$$W = \frac{iq_s \sqrt{\beta}}{2\pi} \int_{\beta}^{\zeta} \frac{dt}{t\sqrt{t-\beta}} \quad (58a)$$

$$Z = -iy + \frac{q_s \sqrt{\beta}}{2\pi} \frac{e^{i\pi\sigma}}{kB(1/2, \sigma)} \int_{\beta}^{\zeta} \left( \int_1^{\tau} \frac{d\tau}{(\tau-1)^{1-\sigma} \sqrt{\tau}} \right) \frac{dt}{t\sqrt{t-\beta}} \quad (58b)$$

$$b = \frac{q_s \sqrt{\beta}}{\pi kB(1/2, \sigma)} \int_{\beta}^1 \frac{F_1(t, \sigma) dt}{t\sqrt{t-\beta}} \quad (58c)$$

$$y = \frac{q_s \sqrt{\beta}}{2\pi} \frac{\sin \pi\sigma}{kB(1/2, \sigma)} \int_1^{\infty} \frac{F_2(t, \sigma) dt}{t\sqrt{t-\beta}} = \frac{q_s \sqrt{\beta}}{2\pi kB(1/2, \sigma)} \int_0^{\beta} \frac{B_1(t, \sigma) dt}{t\sqrt{\beta-t}} \quad (58d)$$

$$X = \frac{b}{2} + y \cot \pi\sigma$$

$$+ y \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{(F_3(t, \sigma) - B(1/2, \sigma)) \cot \pi\sigma dt}{-t\sqrt{\beta-t}} \bigg/ \int_1^{\infty} \frac{F_2(t, \sigma) dt}{t\sqrt{t-\beta}} \quad (58e)$$

$$Y = y \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{(\cot \pi\sigma F_3(t, \sigma) - B(1/2, \sigma)) dt}{-t\sqrt{\beta-t}} \bigg/ \int_1^{\infty} \frac{F_2(t, \sigma) dt}{t\sqrt{t-\beta}} \quad (58f)$$

and width of seepage flow at infinity

$$B = b + 2y \cot \pi\sigma$$

$$+ 2y \int_{-\infty}^0 \frac{(F_3(t, \sigma) - B(1/2, \sigma)) \cot \pi\sigma dt}{-t\sqrt{\beta-t}} \bigg/ \int_1^{\infty} \frac{F_2(t, \sigma) dt}{t\sqrt{t-\beta}} \quad (58g)$$

Comparing Eq. (1) with Eq. (58d) gives Eq. (14)

##### Rectangular Channel

Fig. 4 shows mappings in different planes for a rectangular channel passing through a homogeneous, isotropic porous medium of infinite extent, i.e., both the drainage layer and water table lie at an infinite depth. The inverse hodograph mapping relations are similar to a rectangular channel having drainage layer at finite depth. On the other hand, the complex potential plane mapping becomes similar to a trapezoidal channel with the drainage layer and water table lying at an infinite depth given by Eq. (58a). With  $\gamma=0$  and  $\sigma=0.5$ , the other relations alter as follows:

$$Z = -iy + \frac{iq_s \sqrt{\beta}}{\pi^2 k} \int_{\beta}^{\zeta} \frac{\tanh^{-1} \sqrt{(t-1)/t}}{t\sqrt{t-\beta}} dt \quad (59a)$$

$$b = \frac{q_s \sqrt{\beta}}{\pi^2 k} \int_{\beta}^1 \frac{\pi/2 - \tan^{-1} \sqrt{t(1-t)}}{t\sqrt{t-\beta}} dt \quad (59b)$$

$$y = \frac{q_s \sqrt{\beta}}{\pi^2 k} \int_1^{\infty} \frac{\tanh^{-1} \sqrt{(t-1)/t}}{t\sqrt{t-\beta}} dt = \frac{q_s \sqrt{\beta}}{\pi^2 k} \int_0^{\beta} \frac{\tan^{-1} \sqrt{t(1-t)}}{t\sqrt{\beta-t}} dt \quad (59c)$$

$$X = \frac{b}{2} + \frac{q_s \sqrt{\beta}}{\pi^2 k} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{\sinh^{-1} \sqrt{-t}}{-t\sqrt{\beta-t}} dt \quad (59d)$$

$$Y = -\frac{q_s \sqrt{\beta}}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{dt}{-t\sqrt{\beta-t}} = \frac{q_s}{2\pi k} \ln \left( \frac{\sqrt{\beta-\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta-\zeta} + \sqrt{\beta}} \right) \quad (59e)$$

and

$$\frac{B}{2} = \frac{b}{2} + \frac{q_s \sqrt{\beta}}{\pi^2 k} \int_{-\infty}^0 \frac{\sinh^{-1} \sqrt{-t}}{-t\sqrt{\beta-t}} dt \quad (59f)$$

For  $\beta=1$ , the integrals in Eq. (59c) have the following special value:

$$\int_1^{\infty} \frac{\tanh^{-1} \sqrt{(t-1)/t}}{t\sqrt{t-1}} dt = \int_0^1 \frac{\tan^{-1} \sqrt{t(1-t)}}{t\sqrt{1-t}} dt = 4G \quad (60)$$

## Appendix II. Comparison with existing solutions

### Drainage Layer at Shallow Depth

Using the Zhukovsky function and conformal mapping, Muskat (1982) gave the following approximate solution for the seepage function for a trapezoidal channel

$$F_s = \frac{2mK(\beta)}{K(\beta) - F(\beta, \sin^{-1}\gamma)} \quad (61a)$$

where the transformation variables  $\beta$  and  $\gamma$  are given by the simultaneous solution of the following:

$$\frac{d}{y} = \frac{mK(\sqrt{1-\beta^2})}{K(\beta) - F(\beta, \sin^{-1}\gamma)} \quad (61b)$$

$$\frac{b}{y} = \frac{2mF(\beta, \sin^{-1}\gamma)}{K(\beta) - F(\beta, \sin^{-1}\gamma)} - \frac{2K(\gamma)}{K(\sqrt{1-\gamma^2})} \quad (61c)$$

Chahar (2000) and Swamee et al. (2001) obtained an exact analytical solution for a rectangular channel using an inverse hodograph and Schwarz Christoffel transformations but mapping the vertices of the polygons in the  $dZ/dW$  and  $W$  planes onto the auxiliary plane at different locations. The solution was

$$F_s = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}} K(\sqrt{(\beta-1)/\beta}) \left/ \int_0^1 \frac{\tan^{-1}\sqrt{(\beta-\tau)/(\gamma+\tau)}}{\sqrt{\tau(1-\tau)(\beta-\tau)}} d\tau \right. \quad (62a)$$

where  $\beta$  and  $\gamma$  were given by simultaneous solution of

$$\frac{d}{y} = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} K(1/\sqrt{\beta}) \left/ \int_0^1 \frac{\tan^{-1}\sqrt{(\beta-\tau)/(\gamma+\tau)}}{\sqrt{\tau(1-\tau)(\beta-\tau)}} d\tau \right. \quad (62b)$$

$$\frac{b}{y} = 2 \left( \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} F \left( \sqrt{\frac{\beta-1}{\beta}}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{\gamma}{1+\gamma}} \right) - \int_0^\gamma \frac{\tan^{-1} \sqrt{\frac{\beta+\tau}{\gamma-\tau}} d\tau}{\sqrt{\tau(1+\tau)(\beta+\tau)}} \right) \left/ \int_0^1 \frac{\tan^{-1} \sqrt{\frac{\beta-\tau}{\gamma+\tau}} d\tau}{\sqrt{\tau(1-\tau)(\beta-\tau)}} \right. \quad (62c)$$

In the present solution  $0 \leq \gamma \leq \beta \leq 1$ ; while in Chahar's (2000) solution  $0 \leq \gamma \leq \infty$  and  $1 \leq \beta \leq \infty$ .

Using an inverse hodograph and conformal mapping, Bruch and Street (1967a, b) gave the following expression for the seepage function for a triangular channel, but with a different auxiliary plane mapping

$$F_s = 2 \frac{d}{y} \frac{K(1/\sqrt{\gamma})}{K(\sqrt{(\gamma-1)/\gamma})} \quad (63a)$$

where the transformation variable  $\gamma$  was given by

$$1 - \frac{d}{y} = \text{Im} \left( (m+i) \frac{\int_0^{-\gamma} \left( \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{1-\sigma}(1+\tau)^{0.5+\sigma}\sqrt{\tau+\gamma}} \right) \frac{dt}{\sqrt{t(1+t)(t+\gamma)}}}{\int_0^{-1} \left( \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{1-\sigma}(1+\tau)^{0.5+\sigma}\sqrt{\tau+\gamma}} \right) \frac{dt}{\sqrt{t(1+t)(t+\gamma)}}} \right) \quad (63b)$$

where  $\text{Im}$ =imaginary part. In the present solution  $0 \leq \gamma \leq 1$ ; while in Bruch's solution  $1 \leq \gamma \leq \infty$ .

### Drainage Layer and Water Table at Infinite Depth

Vedernikov (Harr 1962) gave an exact solution to the present case using an inversion of the hodograph and conformal mapping technique as

$$F_s = \pi m \int_\beta^1 \frac{tdt}{(1-t^2)^{(0.5+\sigma)}(\beta^2-t^2)^{(1-\sigma)}} \left/ \int_\beta^1 \frac{t \cos^{-1} t dt}{(1-t^2)^{(0.5+\sigma)}(\beta^2-t^2)^{(1-\sigma)}} \right. \quad (64a)$$

where  $\beta$ =transformation variable was given by

$$\frac{b}{y} = 2 \int_0^\beta \frac{t \sin^{-1} t dt}{(1-t^2)^{(0.5+\sigma)}(\beta^2-t^2)^{(1-\sigma)}} \left/ \sin \pi \sigma \int_\beta^1 \frac{t \cos^{-1} t dt}{(1-t^2)^{(0.5+\sigma)}(\beta^2-t^2)^{(1-\sigma)}} \right. \quad (64b)$$

Vedernikov obtained his solution using a full seepage domain while the present solution utilized the advantage of the symmetry of the seepage flow in the vertical plane and hence only half of the seepage domain is used in the solution.

Using conformal mapping and Green-Neumann functions, Morel-Seytoux (1964) gave the solution for a rectangular channel as follows:

$$F_s = \pi^2 \left/ 2 \int_\beta^\infty \frac{\ln[(\sqrt{1+t^2} + \sqrt{t^2 - \beta^2})/\sqrt{1+\beta^2}]}{1+t^2} dt \right. \quad (65a)$$

where transformation variable  $\beta$  was given by

$$\frac{b}{y} = \int_0^\beta \cos^{-1} \left( \frac{2t^2 + 1 - \beta^2}{1 + \beta^2} \right) \frac{dt}{1+t^2} \left/ \int_\beta^\infty \frac{\ln[(\sqrt{1+t^2} + \sqrt{t^2 - \beta^2})/\sqrt{1+\beta^2}]}{1+t^2} dt \right. \quad (65b)$$

The existing Vedernikov's solution (Harr 1962) for a triangular channel is

$$F_s = \pi m \int_0^1 (1-t^2)^{-(0.5+\sigma)} t^{(1-2\sigma)} dt \left/ \int_0^1 \cos^{-1} t (1-t^2)^{-(0.5+\sigma)} t^{(1-2\sigma)} dt \right. \quad (66)$$

### Notation

The following symbols are used in this paper:

- $a', b', c', \dots$  = points on flow domain (dimensionless);
- $B$  = seepage width at drainage layer (m);
- $B(\dots)$  = complete beta function (dimensionless);
- $B_t(\dots)$  = incomplete beta function (dimensionless);
- $b$  = bed width of channel (m);
- $d$  = depth of drainage layer/aquifer (m);

$F_s$  = seepage function (dimensionless);  
 $F(\cdot, \cdot)$  = incomplete elliptical integral of the first kind (dimensionless);  
 $F_1(t, \sigma)$  = integral defined by Eq. (44) (dimensionless);  
 $F_2(t, \sigma)$  = integral defined by Eq. (51) (dimensionless);  
 $F_3(t, \sigma)$  = integral defined by Eq. (54) (dimensionless);  
 ${}_2F_1$  = Gauss-hypergeometric series (dimensionless);  
 $G$  = Catalan constant (dimensionless);  
 $i$  = imaginary number (dimensionless);  
 $K(\cdot)$  = complete elliptical integral of the first kind (dimensionless);  
 $k$  = hydraulic conductivity (m/s);  
 $m$  = side slope of channel (1 vertical:  $m$  horizontal) (dimensionless);  
 $q_s$  = seepage discharge per unit length of channel ( $m^2/s$ );  
 $T$  = width of channel at water surface (m);  
 $u$  = velocity of seeping water along  $X$  axis (m/s);  
 $V$  = resultant velocity of seeping water (m/s);  
 $v$  = velocity of seeping water along  $Y$  axis (m/s);  
 $W = \phi + i\psi$  complex potential ( $m^2/s$ );  
 $X$  = real axis of the complex plane (m);  
 $Y$  = imaginary axis of the complex plane (m);  
 $y$  = water depth in channel (m);  
 $Z = X + iY$  complex plane variable (m);  
 $\beta, \gamma$  = transformation variables (dimensionless);  
 $\Gamma$  = gamma function (dimensionless);  
 $\zeta$  = complex variable in auxiliary plane (dimensionless);  
 $\sigma = (1/\pi)\cot^{-1}m =$  (dimensionless);  
 $\tau, t$  = dummy variables (dimensionless);  
 $\phi$  = velocity potential ( $m^2/s$ ); and  
 $\psi$  = stream function ( $m^2/s$ ).

## References

- Abramowitz, M., and Stegun, I. A. (1972). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, Dover, New York.
- Bouwer, H. (1965). "Theoretical aspects of seepage from open channels." *J. Hydr. Div.*, 91(HY3), 37–59.
- Bruch, J. C., and Street, R. L. (1967a). "Free surface flow in porous media." *J. Irrig. and Drain. Div.*, 93(3), 125–145.
- Bruch, J. C., and Street, R. L. (1967b). "Seepage from an array of triangular channels." *J. Engrg. Mech. Div.*, 93(3), 63–82.
- Byrd, P. F., and Friedman, M. D. (1971). *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*, Springer, Berlin.
- Chahar, B. R. (2000). "Optimal design of channel sections considering seepage and evaporation losses." Ph.D. thesis, Dept. of Civil Engineering, Univ. of Roorkee, Roorkee, India.
- Chahar, B. R. (2001). "Extension of Vederikov's graph for seepage from canals." *Ground Water*, 39(2), 272–275.
- Chahar, B. R. (2005). "Seepage from canals." *Project Rep. F. No. 1-15/FD/CA(18)/2001-2002*, All India Council for Technical Education, New Delhi.
- El Nimr, A. (1963). "Seepage from parallel trapezoidal channels." *J. Engrg. Mech. Div.*, 89(4), 1–11.
- Garg, S. P., and Chawla, A. S. (1970). "Seepage from trapezoidal channels." *J. Hydr. Div.*, 96(6), 1261–1282.
- Harr, M. E. (1962). *Groundwater and seepage*, McGraw-Hill, New York.
- International Commission on Irrigation and Drainage. (1967). "Controlling seepage losses from irrigation canals." *Worldwide Survey*, New Delhi, India.
- Jeppson, R. W. (1968). "Seepage from ditches—Solution by finite differences." *J. Hydr. Div.*, 94(HY1), 259–283.
- Kacimov, A. R. (1992). "Seepage optimization for trapezoidal channel." *J. Irrig. Drain. Eng.*, 118(4), 520–526.
- Liggett, J. A., and Liu, P. L.-F. (1983). *The boundary integral equation method for porous media flow*, Allen & Unwin, London.
- Morel-Seytoux, H. J. (1964). "Domain variations in channel seepage flow." *J. Hydr. Div.*, 90(HY2), 55–79.
- Muskat, M. (1982). *Flow of homogeneous fluids through porous media*, Int. Human Resources Development Corporation, Boston.
- Pinder, G. F., and Gray, W. G. (1977). *Finite element simulation in surface and subsurface hydrology*, Academic, London.
- Polubarinova-Kochina, P. Y. (1962). *Theory of ground water movement*, Princeton University Press, Princeton, N.J.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (1992). *Numerical recipes in Fortran*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Remson, I., Hornberger, G. M., and Molz, F. J. (1971). *Numerical methods in subsurface hydrology*, Wiley-Interscience, New York.
- Rohwer, C., and Stout, O. V. P. (1948). "Seepage losses from irrigation canals." *Technical Bulletin No. 38*, Colorado Agricultural Experiment Station, Fort Collins, Colo.
- Sharma, H. D., and Chawla, A. S. (1974). "Analysis of canal seepage to interceptor drain." *J. Irrig. and Drain. Div.*, 100(3), 351–369.
- Sharma, H. D., and Chawla, A. S. (1979). "Canal seepage with boundary at finite depth." *J. Hydr. Div.*, 105(7), 877–879.
- Strack, O. D. L. (1989). *Groundwater mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Swamee, P. K., Mishra, G. C., and Chahar, B. R. (2000). "Design of minimum seepage loss canal sections." *J. Irrig. Drain. Eng.*, 126(1), 28–32.
- Swamee, P. K., Mishra, G. C., and Chahar, B. R. (2001). "Design of minimum seepage loss canal sections with drainage layer at shallow depth." *J. Irrig. Drain. Eng.*, 127(5), 287–294.
- Swamee, P. K., Mishra, G. C., and Chahar, B. R. (2002a). "Design of minimum water loss canal sections." *J. Hydraul. Res.*, 40(2), 215–220.
- Swamee, P. K., Mishra, G. C., and Chahar, B. R. (2002b). "Optimal design of transmission canal." *J. Irrig. Drain. Eng.*, 128(4), 234–243.
- Wachyan, E., and Rushton, K. R. (1987). "Water losses from irrigation canals." *J. Hydrol.*, 92(3–4), 275–288.
- Worstell, R. V. (1976). "Estimating seepage losses from canal systems." *J. Irrig. and Drain. Div.*, 102(1), 137–147.